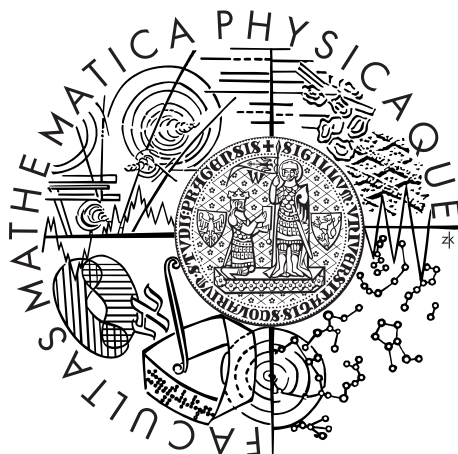


Univerzita Karlova v Praze  
Matematicko-fyzikální fakulta

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE



Ida Fürjesová

## Errors-in-variables models

Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Michal Pešta, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Finanční matematika

Praha 2012

Touto cestou sa chcem poďakovať svojmu vedúcemu bakalárskej práce  
RNDr. Michalovi Peštovi, Ph.D. za cenné rady a postrehy počas jej tvorby a ta-  
kisto svojej rodine a priateľom za podporu a pomoc.

Prehlasujem, že som túto bakalársku prácu vypracovala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov, literatúry a ďalších odborných zdrojov.

Beriem na vedomie, že sa na moju prácu vzťahujú práva a povinnosti vyplývajúce zo zákona č. 121/2000 Sb., autorského zákona v platnom znení, predovšetkým skutočnosť, že Univerzita Karlova v Prahe má právo na uzavretie licenčnej zmluvy o použití tejto práce ako školského diela podľa § 60 odst. 1 autorského zákona.

V Prahe dňa 2.8.2012

Podpis autora

**Názov práce:** Modely errors-in-variables

**Autor:** Ida Fürjesová

**Katedra:** Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

**Vedúci bakalárskej práce:** RNDr. Michal Pešta, Ph.D., Katedra pravděpodobnosti a matematické statistiky

**Abstrakt:**

Táto bakalárska práca analyzuje model errors-in-variables. Porovnáva metódy odhadovania parametrov modelu, metódu najmenších štvorcov a metódu úplne najmenších štvorcov. Hlavný rozdiel metód spočíva v prístupe ku chybám v meraniach. Prvá časť práce sa zameriava na porovnávanie metód z teoretického hľadiska. Definuje základné pojmy a graficky znázorňuje rozdiely v metódach. Práca rozoberá aj algebraické princípy riešení metód odhadovania parametrov. Záver teoretickej časti obsahuje analýzu štatistických vlastností odhadov. Prostredníctvom simulácie dát je porovnaná metóda najmenších štvorcov a metóda úplne najmenších štvorcov podľa veľkosti strednej kvadratickej odchýlky.

**Kľúčové slová:** model errors-in variables, metóda najmenších štvorcov, metóda úplne najmenších štvorcov

**Title:** Errors-in-variables models

**Author:** Ida Fürjesová

**Department:** Department of Probability and Mathematical Statistics

**Supervisor:** RNDr. Michal Pešta, Ph.D., Department of Probability and Mathematical Statistics

**Abstract:**

This thesis analyzes an errors-in-variables model. It compares parameter estimation methods least squares and total least squares. The main difference between these methods lies in approach to the measurements errors. The first part of the bachelor thesis focuses on theoretical aspect of methods. It defines basic terms and shows differences in the methods graphically. Thesis also demonstrates algebraic solutions of the estimation methods. The theoretical part ends up with statistical properties of the estimating techniques. The thesis compares methods least squares and total least squares according to the size of mean square error by simulation study.

**Keywords:** errors-in-variables, least squares, total least squares

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Úvod do metódy úplne najmenších štvorcov</b>	<b>3</b>
1.1 Regresný model . . . . .	3
1.2 Porovnanie metód LS a TLS . . . . .	4
1.2.1 Metóda LS . . . . .	4
1.2.2 Model errors-in-variables (EIV) . . . . .	6
<b>2 Základné princípy problému TLS</b>	<b>7</b>
2.1 Úvod do základných princípov TLS . . . . .	7
2.2 Metóda najmenších štvorcov . . . . .	7
2.2.1 SVD rozklad . . . . .	8
2.3 Metóda úplne najmenších štvorcov . . . . .	10
2.3.1 Riešenie TLS pomocou SVD . . . . .	10
2.3.2 Základné algoritmy riešenia . . . . .	12
2.3.3 Porovnanie chýb TLS a LS . . . . .	13
<b>3 Štatistické vlastnosti TLS</b>	<b>14</b>
3.1 Úvod do problematiky . . . . .	14
3.2 Regresia a EIV model . . . . .	14
3.2.1 Čiastočný errors-in-variables model . . . . .	14
3.3 Štruktúra chyby a TLS na transformované dáta . . . . .	14
3.3.1 Štruktúra chyby (Error structure) . . . . .	15
3.4 Nekonzistencia OLS . . . . .	16
3.5 Konzistencia TLS . . . . .	16
3.6 Asymptotické rozdelenie . . . . .	18
3.7 Praktická závažnosť . . . . .	19
<b>4 Simulácie</b>	<b>21</b>
4.1 Chyby s normálnym rozdelením . . . . .	21
4.2 Chyby s centrovaným gamma rozdelením . . . . .	23
4.3 Vychýlenie a rozptyl . . . . .	25
4.4 Závislosť MSE, vychýlenia a rozptylu na $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\Theta^2$ . . . . .	27
4.5 Zhrnutie . . . . .	28
<b>Záver</b>	<b>30</b>
<b>Zoznam použitej literatúry</b>	<b>31</b>

# Úvod

V praxi sa často vyskytuje problém odhadovania parametrov. Vhodným spôsobom ako odhadnúť parametre je metóda najmenších štvorcov a metóda úplne najmenších štvorcov. Metóda úplne najmenších štvorcov, ktorú budeme podrobne analyzovať, sa využíva v mnohých vedných disciplínach ako napr. v zdravotníctve, ekonomických vedách, poľnohospodárstve, biomedicíne a ďalších odvetviach. Používa sa v kalibračných technikách a filtrácii signálu.

Druhé využitie metódy úplne najmenších štvorcov sa nazýva *ortogonálnym vyrovnávaním metódou najmenších štvorcov* a spočíva vo vyrovnávaní lineárnej nadroviny dimenzie  $s$ , kde  $1 \leq s \leq n$ , prislúchajúcej skupin bodov z  $\mathbb{R}^{n+1}$ , teda minimalizuje súčet štvorcov vzdialeností od týchto bodov k nadrovine.

Cieľom tejto práce je bližšie analyzovať model errors-in-variables (EIV) a podrobne porovnať dve metódy odhadovania parametrov modelu, metódu najmenších štvorcov a metódu úplne najmenších štvorcov. Hlavný rozdiel medzi metódami spočíva v tom, že metóda úplne najmenších štvorcov berie do úvahy chyby v regresoroch a aj v odozvách, narozdiel od klasickej metódy najmenších štvorcov, ktorá počíta s chybami len v odozvách.

V prvej kapitole predstavíme klasickú metódu najmenších štvorcov (LS) a metódu úplne najmenších štvorcov (TLS). Graficky znázorníme rozdiely metód a vysvetlíme základné princípy EIV modelu.

Druhá kapitola je venovaná riešeniu algebraických princípov LS a TLS. Definujeme metódu najmenších štvorcov a metódu úplne najmenších štvorcov. K pochopeniu odhadu TLS je potrebné poznať SVD rozklad (singular value decomposition) a tiež Eckhart-Young-Mirského aproximáciu. Ďalej definujeme riešenie TLS a uzavretú formu riešenia. Na záver druhej kapitoly rozoberieme algoritmus riešenia TLS, existenciu a jednoznačnosť riešenia.

Nasledne porovnáme model klasickej regresie s EIV modelom a definujeme zmiešaný model regresie a errors-in-variables (čiastočný EIV model). Tretia kapitola rozoberá aj štatistické vlastnosti LS a TLS. Analyzujeme konzistenciu odhadov oboch metód. Odhad LS je narozdiel od odhadu TLS konzistentný, čo zabezpečuje, že odhad je blízko ku skutočnej hodnote. Je dôležité poznať konzistenčné vlastnosti, ale je nevyhnutné poznať rozdelenie odhadov. Kvôli jednoduchosti uvažujeme len o asymptotických rozdeleniach. Na záver kapitoly sa pokúsime zhodnotiť kvalitu odhadovania v EIV modeli z výsledkov experimentálnej simulácie, na čo nadväzuje štvrtá kapitola, kde simulujeme strednú kvadratickú odchýlku (MSE) oboch metód.

Zameriame sa na porovnávanie metód LS a TLS. Graficky, pomocou strednej kvadratickej odchýlky, sledujeme, ktorá metóda vykazuje menšie chyby. Porovnávať budeme aj jednotlivé zložky MSE, čo sú vychýlenie a rozptyl odhadu. Skúšame rôzne kombinácie pravdepodobnostných rozdelení chýb, rôzne dáta a počty simulácií. Z dostatočného množstva kombinácií dokážeme určiť presnejšiu metódu. Pozorujeme, aký vplyv má voľba parametrov na chybu a ako sa mení veľkosť MSE pre rôzne hodnoty rozptylov chýb.

# 1. Úvod do metódy úplne najmenších štvorcov

## 1.1 Regresný model

*Metóda úplne najmenších štvorcov* (TLS) je technikou odhadovania lineárnych regresných parametrov a má za úlohu vyrovnávať chyby v dátach. Odhadovanie týchto parametrov rieši problémy viacerých vedných disciplín ako fyzika, ekonómia, biológia a mnoho ďalších.

Základný model lineárnej regresie zapíšeme:

$$\beta_0 + \beta_1 x_{i1} \approx y_i, \quad (1.1)$$

kde  $x_{i1}, i = 1, \dots, n$  sú regresormi (kovariátmi), inak nezávislými premennými a  $y_i$  je odozvou (závislou premennou) a  $\beta_0$  je absolútnym členom,  $\beta_1$  je smernicou regresnej priamky, ktorá určuje celý systém. Ďalej nebudeme počítat s absolútnym členom, nazývaným interceptom, tento predpoklad sme zvolili pre zjednodušenie modelu. Regresná priamka prechádza počiatkom sústavy. Model obsahujúci intercept rozoberieme v kapitole (3.3.2). Problém, ktorým sa budeme zaoberať je určenie odhadu skutočného a neznámeho parametra z určitého počtu pozorovaní premenných, čo sa dočítame aj v [1]. Vzniká *predeterminovaný* systém  $n$  lineárnych rovníc, matica  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , vektor pozorovaní  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$  a  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ , kde  $n > p$

$$\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}, \quad (1.2)$$

ktorý nazývame modelom regresie a môžeme ho zapísať v nasledovnom tvare:

$$\beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} \approx y_i.$$

V predošlej rovnosti a v rovnosti (1.2), riadkový vektor  $\mathbf{X}_i = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip}]$ ,  $i = 1, \dots, n$  značí riadky regresnej matice zloženú z regresorov a  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1^\top, \dots, \mathbf{X}_n^\top]^\top$  celú maticu,  $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_n]^\top$  označuje vektor odoziev a vektor konštánt  $\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \dots, \beta_p]^\top$  voláme regresnými parametrami.

Našou snahou je odhadnúť neznámy parameter  $\boldsymbol{\beta}$ . Môžeme zvoliť postup klasickou *metódou najmenších štvorcov* (LS) alebo *metódou úplne najmenších štvorcov* (TLS). Rozdiel medzi týmito metódami spočíva v tom, že pri metóde LS neberieme do úvahy chyby v meraní  $\mathbf{X}$ , ktoré sa nachádzajú na ľavej strane rovnosti (1.2). Predpokladáme chyby len vo vektore  $\mathbf{Y}$ , teda len v pravej časti rovnosti (1.2). Chyby v matici  $\mathbf{X}$  môžu nastať z rôznych dôvodov, napr. ľudský faktor, chyby pri výbere dát, chyby pri modelovaní, chyby spôsobené prístrojmi. Predpoklad toho, že  $\mathbf{X}$  neobsahuje chyby je nereálny. Metóda TLS berie do úvahy chyby na oboch stranách rovnosti a hľadá vhodný podpriestor pre merania  $(\mathbf{X}_i^\top, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , kde  $\mathbf{X}_i^\top$  je  $i$ -tým riadkom matice  $\mathbf{X}$ .

Model lineárnej regresie (1.1) bez absolútneho člena má tvar

$$x\beta \approx y. \quad (1.3)$$

## 1.2 Porovnanie metód LS a TLS

Pomocou jednoduchého príkladu ukážeme rozdiely metód TLS a LS.

### 1.2.1 Metóda LS

Odhad parametru  $\beta$  získame z  $n$  meraní premenných  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}$  riešením rovníc (1.2).

V prípade, že chyba značená  $\varepsilon$  nastala len vo vektore  $\mathbf{Y}$  a  $\mathbf{X}$  považujeme za presne namerané, platí

$$\mathbf{X}\beta = \mathbf{Y} - \varepsilon, \quad kde \quad \min_{\varepsilon \in \mathbb{R}^n, \beta \in \mathbb{R}^m} \|\varepsilon\|_2. \quad (1.4)$$

Pre  $i$ -tý prvok vektoru  $\mathbf{Y}$  bude platiť

$$y_i = y_i^0 + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.5)$$

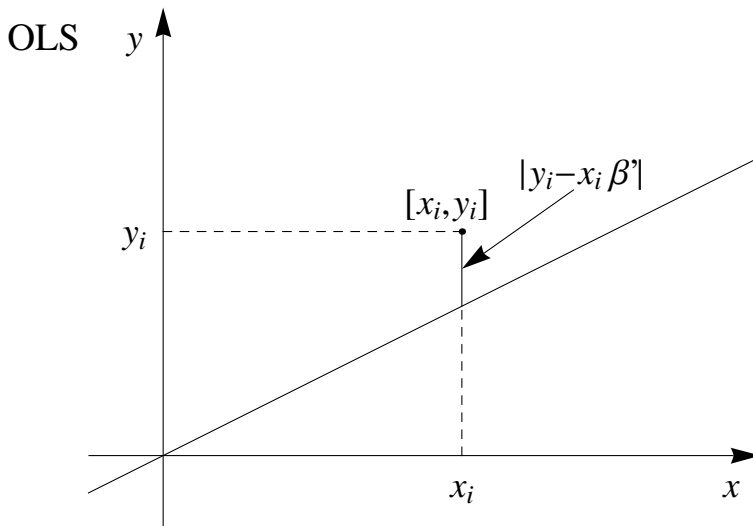
kde  $y_i^0$  označuje skutočnú hodnotu premennej  $y_i$ ,  $\varepsilon_i$  je k nej prislúchajúca náhodná chyba. Ak  $\mathbf{X}$  bolo presne namerané, potom sa chyby nachádzajú len na pravej strane rovnice, vo vektore  $\mathbf{Y}$ . Hovoríme o chybách v meraní odoziev  $\mathbf{Y}$ . V tomto prípade je vhodné použitie metódy LS, pretože poskytuje najlepší nestranný lineárny odhad. Odhad  $\beta$  v jednodimenzionálnom prípade metódou LS minimalizovaním súčtu štvorcov  $\sum_{i=1}^n (y_i - \beta x_i)^2$  bude mať tvar

$$\beta' = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad (1.6)$$

kde  $x_i$  bude  $i$ tý element vektoru  $\mathbf{X}_i$ .

Metóda LS v tomto tvare sa nazýva aj ako *štandardná metóda najmenších štvorcov* z anglického názvu *ordinary Least squares (OLS)*.

Tento jednorozmerný prípad pre  $p = 1$  si graficky znázorníme v obrázku (1.1).



Obr. 1.1: Metóda najmenších štvorcov (OLS)

Rovnosť (1.3) si upravíme do tvaru:

$$\frac{y}{\beta} \approx x. \quad (1.7)$$



Doteraz sme o chybe uvažovali len v  $y$  (na pravej strane rovnosti (1.3)). Ak by sme sa teraz analogicky pozerali na (1.7), tak by sme mohli uvažovať o chybe len v  $x$  (na pravej strane rovnosti (1.7)) a  $y$  by mohlo byť považované za presne namerané. Tento typ LS sa nazýva *metóda najmenších štvorcov v dátach* z anglického názvu *data least squares (DLS)*, pretože chyba sa nachádza v matici  $\mathbf{X}$ . Počítame s chybami len v nezávislých premenných (v nezávislých dátach). Túto chybu budeme označovať písmenom  $\Xi$ . K tomu aby sme mohli ukázať odhad pomocou DLS, potrebujeme definovať Frobeniovu maticovú normu, ktorá je definovaná nasledovne:

$$\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_{ij}^2} = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\top)} = \sqrt{\sum_{i=1}^q \sigma_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^r \sigma_i^2}, \quad q = \min\{n, p\},$$

kde  $\mathbf{A} \equiv (a_{ij})_{i,j=1}^{n,p}$ .

Čiže  $\beta$  odhad pomocou DLS má tvar

$$(\mathbf{X} - \Xi)\beta = \mathbf{Y}, \quad \text{kde} \quad \min_{\Xi \in \mathbb{R}^{n \times p}, \beta \in \mathbb{R}^p} \|\Xi\|_F. \quad (1.8)$$

Pre  $i$ -tú zložku  $\mathbf{X}$  platí

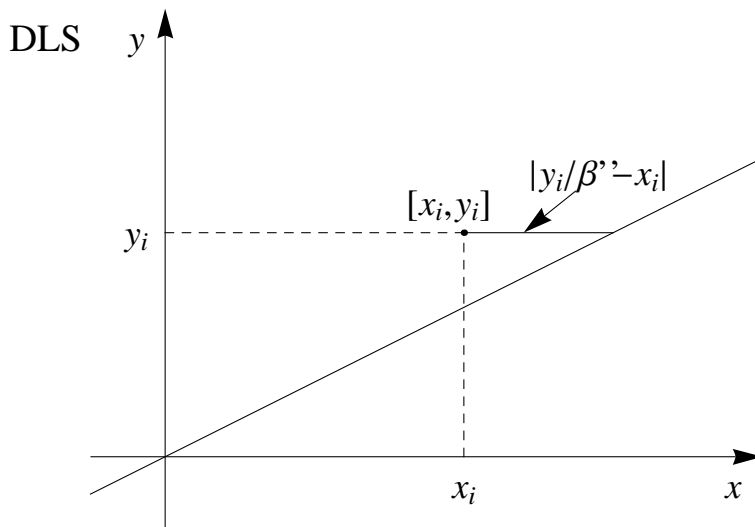
$$x_i = x_i^0 + \Xi_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.9)$$

$x_i^0$  značí skutočnú hodnotu premennej  $x_i$  a  $\Xi_i$  je jej prislúchajúcou náhodnou chybou. Budeme minimalizovať súčet štvorcov rozdielov  $\sum_{i=1}^n (y_i/\beta - x_i)^2$ , čiže nameraných hodnôt  $x_i$  a odhadovaných hodnôt  $y_i/\beta$ . Odhad  $\beta''$  metódou DLS vyzerá nasledovne:

$$\beta'' = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i y_i}. \quad (1.10)$$

Podrobnosti nájdeme v [1].

Metódu DLS pre  $p = 1$  si znázorníme na obrázku (1.2).



Obr. 1.2: Metóda najmenších štvorcov v dátach (DLS)

### 1.2.2 Model errors-in-variables (EIV)

Ak zároveň regresory aj odozvy obsahujú chyby. Potom hovoríme o modeli *errors-in-variables (EIV)*

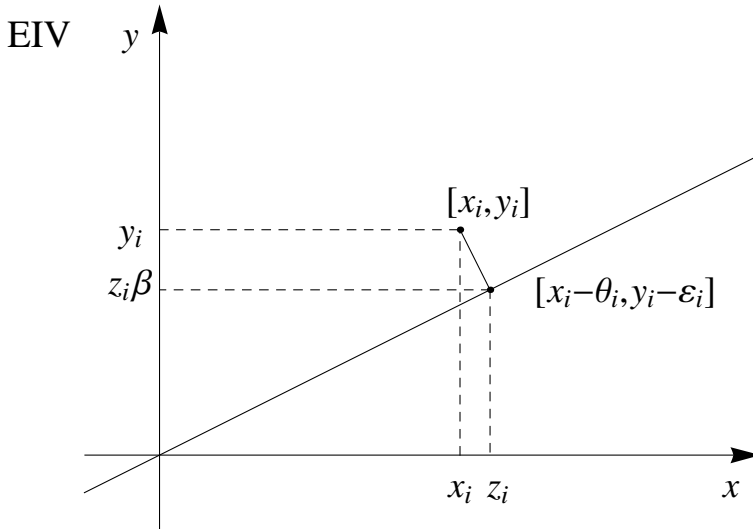
$$\mathbf{Y} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{a} \quad \mathbf{X} = \mathbf{Z} + \boldsymbol{\Theta}. \quad (1.11)$$

V tomto modeli  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$  je neznámym odhadovaným parametrom,  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  značí maticu náhodných kovariátov a  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$  náhodnú odozvu.  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  je neznámou konštantou, ktorá má plnú hodnotu. Dvojica  $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^n$  a  $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  označuje náhodné chyby a ich združené rozdelenie je absolútne spojité vzhľadom k Lebesgueovej miere.

V tomto modeli budeme minimalizovať chyby v závislých a tiež v nezávislých premenných.

$$\min_{[\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\varepsilon}] \in \mathbb{R}^{n \times (p+1)}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p} \|[\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\varepsilon}]\|_F \quad \text{za podmienky} \quad \mathbf{Y} - \boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{X} - \boldsymbol{\Theta})\boldsymbol{\beta}. \quad (1.12)$$

Pre  $p = 1$  si metódu graficky znázorníme na obrázku (1.3).



Obr. 1.3: Úplná metóda najmenších štvorcov (TLS)

Metóda odhadu  $\boldsymbol{\beta}$  v tomto modeli je *metóda úplne najmenších štvorcov* z anglického *total least squares (TLS)*. Dosadením nášho riešenia  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  do rovnice (1.2) dostaneme riešenie pre  $p = 1$ . Názov *TLS* je pomerne nový, metóda bola najskôr známa pod názvom *ortogonálna regresia*. Názov ortogonálna regresia vychádza z toho, že uhol v ktorom je meraná vzdialenosť medzi pozorovaným bodom a vyrovnanou krivkou je pravý.

Model EIV (1.11) sa nazýva *funkcionálnym modelom EIV*, ak  $\mathbf{Z}$  berieme ako nenáhodné neznáme konštanty. V prípade, že  $\mathbf{Z}$  berieme ako náhodné kovariáty, potom model označíme ako *Štrukturálny EIV model*, ktorý už však nebudeme v tejto práci rozoberať.

## 2. Základné princípy problému TLS

### 2.1 Úvod do základných princípov TLS

Problém TLS je alternatívou k LS v prípade, že všetky dáta obsahujú chyby. Hlavný princíp TLS spočíva v riešení *predeterminovanej* sústavy lineárnych rovníc  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$ . Budeme sa zaoberať hlavne algebraickými princípmi TLS a LS. Ďalej uvažujeme, že problém má riešenie, ktoré je jednoznačne určené. Pomocou *SVD rozkladu* (z anglického *singular value decomposition*) matice vieme určiť riešenie problému LS. Ukážeme taktiež algoritmus riešenia TLS pomocou SVD rozkladu.

### 2.2 Metóda najmenších štvorcov

Problém LS spočíva v určení vektoru  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$  tak aby sa  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$ , kde  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  a  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ . Ak  $n > p$ , teda v prípade, že máme viac rovníc ako neznámych, hovoríme o predeterminovanom systéme. Navyše ak  $\mathbf{Y} \in R(\mathbf{X})$ , potom  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$  nemá jednoznačné riešenie, kde  $R$  značí lineárny obal tvorenému stĺpcovými vektormi matice  $\mathbf{X}$  (obor hodnôt matice  $\mathbf{X}$ ).

**Definícia 1.** (*Metóda najmenších štvorcov*)

$$\min_{\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p} \|\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{Y}\|_2, \quad \text{kde} \quad \mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Metóda hľadá ľubovoľné minimálne  $\boldsymbol{\beta}'$ , ktoré je riešením  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$ .

**Veta 1.** (*Vlastnosti LS*)

$\boldsymbol{\beta}'$  rieši LS problém (2.1) práve vtedy, keď platí  $\mathbf{X}^\top(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}') = \mathbf{0}$ .

*Dôkaz.* Dôkaz tejto vety nájdeme v [3]. □

Z predošlej vety nám vyplýva, že reziduum  $\mathbf{r}' = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}'$  z riešenia LS, bude ortogonálne k  $R(\mathbf{X})$ , teda k lineárnemu obalu tvorenému stĺpcovými vektormi matice  $\mathbf{X}$ . Ďalej vieme rozložiť vektor  $\mathbf{Y}$  do dvoch ortogonálnych zložiek

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}' + \mathbf{r}' = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}' + \mathbf{r}', \quad \mathbf{r}' \perp \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}$$

$\mathbf{Y}'$  je ortogonálnou projekciou  $\mathbf{Y}$  do  $R(\mathbf{X})$ . Dôležité je, že aj napriek tomu, ak by riešenie LS nebolo jednoznačné, tak tento rozklad je vždy jednoznačný.

Z tejto vety nám vyplýva ďalšia rovnosť

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}.$$

O matici  $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$  vieme, že je pozitívne semidefinitná a symetrická. A z týchto tvrdení nám ďalej bude plynúť aj dôsledok.

**Dôsledok 1.** (*Riešenie a reziduum LS*)

Ak má matica  $\mathbf{X}$  hodnotu  $p$  potom pre (2.1) existuje jednoznačné riešenie

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}, \quad \text{kde} \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{X}(\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top$$

$\mathbf{Y}'$  je ortogonálnou projekciou do  $R(\mathbf{X})$ .

Podrobnosti dôsledku najdeme v [1].

Ak hodnosť matice  $\mathbf{X}$  bude  $r$  a zároveň  $r < p$  potom má riešenie sústavy nekonečno mnoho riešení, pretože sústava (2.1) nemá plnú hodnosť.

### 2.2.1 SVD rozklad

SVD sa využíva pri hľadaní LS aj TLS odhadov.

**Veta 2.** (*SVD rozklad*)

Nech máme  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ . Potom existujú ortonormálne matice  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p] \in \mathbb{R}^{p \times p}$  také, že

$$\mathbf{U}^\top \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\}, \quad (2.2)$$

kde

$$\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

je obdĺžniková matica s elementami

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0$$

na hlavnej diagonále a

$$q = \min\{n, p\}.$$

*Dôkaz.* Dôkaz tejto vety nájdeme v [4]. □

Diagonálna matica  $\mathbf{\Sigma}$  je jednoznačne určená maticou  $\mathbf{A}$ , narozdiel od matíc  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$ .  $\mathbf{\Sigma}$  je diagonálna matica so singulárnymi číslami  $\sigma_i$  na svojej diagonále, ktoré vytvárajú singulárne spektrum. Vektor  $\mathbf{u}_i$  je  $i$ -tým ľavým singulárnym vektorom a  $\mathbf{v}_i$  je  $i$ -tým pravým singulárnym vektorom. Trojica  $(\mathbf{u}_i, \sigma_i, \mathbf{v}_i)$  sa nazýva singulárny triplet. Platnosť rovností  $\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma}$  a  $\mathbf{A}^\top \mathbf{V} = \mathbf{\Sigma}^\top \mathbf{U}$  si môžeme overiť pomocou rovností:

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = \sigma_i \mathbf{u}_i \quad a \quad \mathbf{A}^\top \mathbf{u}_i = \sigma_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, p,$$

porovnávaním stĺpcových hodnôt.

Vďaka predošlému rozkladu si môžeme definovať  $r \in \mathbb{N}_0$  (*cutting point*) najmenšie nenulové singulárne číslo v SVD rozklade matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  (pokiaľ nie sú všetky zložky SVD rozkladu nulové, vtedy  $r = 0$ ) a platí:

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_q = 0, \quad q = \min\{n, p\}.$$

Teda hodnosť  $\text{rank}(\mathbf{A}) = r$ . Pretože matice  $\mathbf{U}$  a  $\mathbf{V}$  sú ortogonálne a získavame rozvoj matice  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$$

Tento rozvoj sa nazýva dyadický rozklad. Je to rozklad matice  $\mathbf{A}$  hodnosti  $r$  na  $r$  sčítancov hodnosti jedna. K preskúmaniu vlastností metódy TLS budeme potrebovať vhodnú maticovú normu. Frobeniova norma patrí medzi typy zložkovej maticovej normy je vyhovujúca.

Z predošlej rovnosti SVD platí

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = \mathbf{V} \Sigma^\top \Sigma \mathbf{V}^\top \quad a \quad \mathbf{A} \mathbf{A}^\top = \mathbf{U} \Sigma \Sigma^\top \mathbf{U}^\top.$$

Hodnoty  $\sigma_i^2, i = 1, \dots, p$  sú vlastnými číslami a vektory  $\mathbf{v}_i$  a  $\mathbf{u}_i$  sú príslušnými vlastnými vektormi symetrických a pozitívne definitných matíc  $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$  a  $\mathbf{A} \mathbf{A}^\top$ .

Frobeniovu normu môžeme chápať ako mnohorozmernú euklidovskú normu, čiže ak budeme počítat Frobeniovu normu pre vektor, počítame s euklidovskou normou.

V nasledujúcej vete budeme aproximovať maticu inou maticou s nižšou hodnotou.

**Veta 3.** (*Eckhart-Young-Mirsky aproximácia*)

Nech je daná matica  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  s hodnotou  $r = \text{rank}(\mathbf{A})$  a nech  $k$  je prirodzené číslo,  $k < r$ . Uvažujeme singulárny rozklad matice  $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^r \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$  a  $\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$  potom platí

$$\min_{\text{rank}(\mathbf{B})=k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2}. \quad (2.3)$$

*Dôkaz.* Dôkaz nájdeme v [5]. □

Ďalej budeme skúmať, čo sa stane so singulárnymi číslami po vymazaní stĺpca matice.

**Veta 4.** (*Interlacing theorem for singular values*)

Nech  $n \geq p$ , pre singulárne hodnoty matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  platí  $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p$ . Ak  $\mathbf{B}$  vznikne vymazaním jedného stĺpca matice  $\mathbf{A}$  a pre singulárne hodnoty  $\mathbf{B}$  platí  $\sigma'_1 \geq \dots \geq \sigma'_{p-1}$ , potom

$$\sigma_1 \geq \sigma'_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma'_2 \geq \dots \geq \sigma'_{p-1} \geq \sigma_p.$$

*Dôkaz.* Dôkaz nájdeme v [6]. □

## 2.3 Metóda úplne najmenších štvorcov

K lepšiemu pochopeniu problému TLS a tiež k formulácii hlavných princípov je vhodné si prepracovať metódu LS.

**Definícia 2.** (*Klasická metóda najmenších štvorcov*)

Nech máme daných  $n$  lineárnych rovníc  $\beta\mathbf{X} \approx \mathbf{Y}$  o  $p$  neznámych  $\beta$ , budeme minimalizovať  $\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'$

$$\min_{\mathbf{Y}' \in \mathbb{R}^n} \|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\|_2, \quad (2.4)$$

$$\text{kde} \quad \mathbf{Y}' \in R(\mathbf{X}). \quad (2.5)$$

Pre nájdené minimum  $\mathbf{Y}'$  musí  $\beta$  spĺňať rovnosť

$$\beta\mathbf{X} = \mathbf{Y}'. \quad (2.6)$$

$\mathbf{Y}'$  predstavuje riešenie LS, *Metódy najmenších štvorcov* a  $\varepsilon = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}'$  označíme ako *opravu* tohto riešenia. K tomu aby platili rovnosti (2.4) a (2.5),  $\mathbf{Y}'$  musí byť ortogonálnou projekciou  $\mathbf{Y}$  do  $R(\mathbf{X})$ . Ak  $\varepsilon$  je minimálne, potom  $\mathbf{Y}' = \mathbf{Y} - \varepsilon$  môže byť odhadované stĺpcami matice  $\mathbf{X}$ . Predpokladáme výskyt chyby len vo vektore  $\mathbf{Y}$  a matica  $\mathbf{X}$  je jednoznačne určená. Toto tvrdenie však nezodpovedá skutočnosti, pretože chyby v matici  $\mathbf{X}$  môžu nastať vplyvom rôznych nepresností pri meraní alebo aj pri výbere a modelovaní dát. Úplná metóda najmenších štvorcov sa líši od klasickej metódy v tom, že TLS počíta aj s chybami v matici  $\mathbf{X}$ .

**Definícia 3.** (*Základný typ metódy úplne najmenších štvorcov*)

Máme daný predeterminovaný systém  $n$  lineárnych rovníc  $\mathbf{X}\beta \approx \mathbf{Y}$  o  $n$  neznámych  $\beta$ , budeme minimalizovať  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - [\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]$ :

$$\min_{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \in \mathbb{R}^{n \times (p+1)}} \|[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - [\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]\|_F, \quad (2.7)$$

$$\text{pre} \quad \hat{\mathbf{Y}} \in R(\hat{\mathbf{X}}) \quad (2.8)$$

pre nájdené minimum  $[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]$  musí  $\beta$  spĺňať

$$\hat{\mathbf{X}}\beta = \hat{\mathbf{Y}} \quad (2.9)$$

a označuje riešenie úplnej metódy najmenších štvorcov. Zodpovedajúcu chybu označíme  $[\Theta, \varepsilon] = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - [\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]$ .

### 2.3.1 Riešenie TLS pomocou SVD

Najprv si pretransformujeme vzťah  $\mathbf{X}\beta \approx \mathbf{Y}$  na

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}][\beta^\top, -1]^\top \approx \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Nech SVD rozklad pre  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  bude

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\top.$$

Ak  $\sigma_{p+1} \neq 0$ , tak hodnosť  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  je  $n+1$  a priestor  $S$  generovaný riadkami matice  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  je dimenzie  $p+1$ , pre  $\sigma_{p+1} = 0$ . Nevieme riešiť predošlý systém rovníc,

lebo je neúplný. Príčinou je, že neexistuje žiaden nenulový vektor ortogonálneho doplnku  $S$ . Pomocou Eckhart-Young-Mirského vety (Vety 3) dokážeme zredukovať hodnotu  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  na  $p$  a dospieť k riešeniu SVD. Minimalizujeme odchýlku aproximácie  $[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]$  k  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ , kde

$$[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}] = \mathbf{U} \hat{\Sigma} \mathbf{V}^\top \quad a \quad \hat{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p, 0).$$

Teda minimálna odchýlka odhadu je

$$\sigma_{p+1} = \min_{\text{rank}([\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}])=p} \|[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - [\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]\|_F$$

a platí

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - [\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}] = [\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\varepsilon}] = \sigma_{p+1} \mathbf{u}_{p+1} \mathbf{v}_{p+1}^\top.$$

Odchýlka z aproximácie TLS má hodnotu jedna a aproximovaný systém

$$[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}][\boldsymbol{\beta}^\top, -1]^\top = \mathbf{0}$$

je riešiteľný a je jednoznačne určený vektorom  $\mathbf{v}_{p+1}$  (posledným stĺpcom  $\mathbf{V}$ , kde  $\mathbf{v}_{p+1} \in \text{Ker}([\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}])$ ), teda patrí do nulity  $[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]$ , symbolom  $\text{Ker}$  označujeme jadro. Riešenie získame prechádzaním  $\mathbf{v}_{p+1}$  až po kým nenarazíme na poslednú zložku -1 alebo

$$[\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top, -1]^\top = -\frac{1}{v_{p+1,p+1}} \mathbf{v}_{p+1}.$$

Ak  $v_{p+1,p+1} \neq 0$ , potom  $\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{X}} \hat{\boldsymbol{\beta}} = -1/v_{p+1,p+1} \hat{\mathbf{X}} [v_{1,p+1}, \dots, v_{p,p+1}]^\top \in R(\hat{\mathbf{X}})$  teda spĺňa predpoklad (2.8) na to, aby  $\boldsymbol{\beta}$  riešilo základný typ úplného súčtu štvorcov, čo sa spomína v [1]. Riešenie (2.10) platí len v prípade, že  $\sigma_{p+1} \neq 0$ , pretože ak by sa rovnalo nule, sústava (2.10) by bola úplná a nebolo by potrebné znižovať hodnotu matice k docieleniu jednoznačne určeného riešenia.

**Veta 5.** *Veta (Riešenie základného typu TLS  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$ )*

*Nech je SVD matice  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$   $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^p \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^\top$  a SVD  $\mathbf{X}$  (resp.  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ ) je  $\mathbf{U}' \Sigma \mathbf{V}^\top$  (resp.  $\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^\top$ ). Ak platí  $\sigma'_p > \sigma_{p+1}$ , potom platí*

$$[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}] = [\mathbf{X} - \boldsymbol{\Theta}, \mathbf{Y} - \boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{U} \hat{\Sigma} \mathbf{V} \quad a \quad \hat{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p), \quad (2.11)$$

*s odpovedajúcou odchýlkou TLS*

$$[\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\varepsilon}] = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - [\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}] = \sigma_{p+1} \mathbf{u}_{p+1} \mathbf{v}_{p+1}^\top \quad (2.12)$$

*rieši (2.7) a (2.8). Navyše*

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{v_{p+1,p+1}} [v_{1,p+1}, \dots, v_{p,p+1}]^\top \quad (2.13)$$

*a je jednoznačným riešením  $\hat{\mathbf{X}} \hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\mathbf{Y}}$ .*

*Dôkaz.* Ukážeme si, že  $v_{p+1,p+1} \neq 0$ . Budeme dokazovať sporom, čiže predpokladáme, že  $v_{p+1,p+1} = 0$ . Potom existuje  $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in \mathbb{R}^p$  pre ktoré platí

$$[\mathbf{w}^\top, 0][\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\top [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \begin{bmatrix} \mathbf{w}^\top \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_{p+1}^2,$$

z toho nám vyplýva, že  $\mathbf{w}^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X} \mathbf{w} = \sigma_{p+1}^2$ . Vzhľadom k tomu, že  $\sigma_p'^2$  je najmenšie vlastné číslo  $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ , dochádzame k sporu s predpokladom  $\sigma_p' > \sigma_{p+1}$ . Dokázali sme existenciu riešenia.

Predpoklad Vety 5 spĺňa podmienky Vety 4 a z toho vyplýva

$$\sigma_1 \geq \sigma_1' \geq \dots \geq \sigma_p \geq \sigma_p' \geq \sigma_{p+1} \geq 0.$$

Vidíme, že  $\sigma_{p+1}$  je singulárne číslo, ktoré sa vyskytuje v  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  len raz a tiež platí  $\sigma_p > 0$ .

Ak  $\sigma_{p+1} \neq 0$ , potom hodnosť matice  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  je  $p+1$ . Pre minimálne  $\|[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - [\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]\|_F$  a pre  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  vyhovujúce rovnosti  $[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}][\hat{\boldsymbol{\beta}}^\top, -1]^\top = 0$  hľadáme odhad  $[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]$ . Hodnosť  $[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]$  je  $p$  a použitím Eckhart-Young-Minského vety (Vety 3) dostaneme rovnosti SVD rozkladu  $[\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]$  (2.11) a tiež jej odpovedajúcu odchýlku (2.12). Posledný stĺpec  $\mathbf{V}$  udáva riešenie TLS problému a dimenzia  $\text{Ker}([\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}])$  je 1, teda riešenie TLS je jednoznačné.

Ak sa  $\sigma_{p+1} = 0$ , potom  $\mathbf{v}_{p+1} \in \text{Ker}([\mathbf{X}, \mathbf{Y}])$  a  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}][\boldsymbol{\beta}^\top, -1]^\top = 0$ . Nie je potrebný žiaden odhad (1.2), pretože riešenie (2.13) je kompatibilné. Jednoznačnosť riešenia vyplýva z toho, že  $[\boldsymbol{\beta}^\top, -1]^\top \perp \text{Range}([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\top)$ .  $\square$

**Veta 6.** *Veta (Uzavretá forma riešenia základného typu TLS)*

*Nech SVD  $\mathbf{X}$  a  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  je rovnaké ako v predošlej Vete 5. Ak platí  $\sigma_p' > \sigma_{p+1}$ , potom*

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X} - \sigma_{p+1}^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}. \quad (2.14)$$

*Dôkaz.* Dôkaz nájdeme v [1]. Tento dôkaz vychádza z rovnosti (2.13). Za predpokladu  $\sigma_p' > \sigma_{p+1}$  nám plynie existencia a jednoznačnosť riešenia, čo sme si už dokázali v dôkaze Vety 5 o riešení základného typu TLS. Singulárny vektor  $\mathbf{v}_i$  je vlastným vektorom  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\top [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  a  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  bude spĺňať nasledujúcu rovnosť s vlastnými vektormi

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\top [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^\top \mathbf{X} & \mathbf{X}^\top \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^\top \mathbf{X} & \mathbf{Y}^\top \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ -1 \end{bmatrix} = \sigma_{p+1}^2 \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Uzavretá forma riešenia vyplýva priamo z tejto rovnosti.  $\square$

### 2.3.2 Základné algoritmy riešenia

Pomocou nasledujúceho algoritmu si ukážeme (ak to bude možné) ako sa vypočíta  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  z  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$  pri minimálnych hodnotách  $(\mathbf{X} - \hat{\boldsymbol{\Theta}})\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{Y} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  a  $\|\hat{\boldsymbol{\Theta}}, \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\|_F$ .

**Algoritmus 1.** *(Základné typy riešenia TLS  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$ )*

*Vstup:*  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  a  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$ .

*1. Vypočítať SVD,  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{U}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^\top$ .*

*2. Ak platí  $v_{p+1,p+1} \neq 0$  potom  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{v_{p+1,p+1}}[v_{1,p+1}, \dots, v_{p,p+1}]^\top$ .*

*END*

Tento algoritmus nájdeme podrobnejšie v [1].

Možné 3 prípady:

1.  $\sigma_p' > \sigma_{p+1}$  alebo ekvivalentne  $\sigma_p > \sigma_{p+1}$  a  $v_{p+1,p+1} \neq 0$ .
2.  $\sigma_p' = \sigma_{p+1}$  a zároveň  $v_{p+1,p+1} \neq 0$ .
3.  $\sigma_n' = \sigma_{n+1}$  a zároveň  $v_{n+1,n+1} = 0$ .



Tieto 3 prípady nájdeme uvedené v [2]. V prvom prípade má matica  $\mathbf{X}$  plnú hodnotu a vieme, že jednoznačné riešenie TLS  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$  existuje a algoritmus ho dokáže vypočítať.

V druhom prípade existuje nekonečne mnoho riešení TLS a môžeme si vybrať riešenie s *minimálnou normou*  $\|\hat{\boldsymbol{\beta}}\|_2$ .

V poslednom prípade riešenie tiež existuje, ale je potrebné dodefinovať ďalšie obmedzenia (predpoklady) TLS problému, ktoré zamedzia nepotrebné dáta pri výpočte tohto problému.

V prvých dvoch prípadoch, kde  $v_{p+1,p+1} \neq 0$ , sa riešenia nazývajú *generické* (*všeobecné*). Nie je potrebné ďalšie dodefinovanie a je možné použiť na počítanie náš algoritmus. V treťom prípade, ktoré je nutné dodefinovať, sa nazýva *negenerické*. Zo skutočných dát sú posledné dva prípady málo pravdepodobné.

Ukážeme si možné postupy pri úprave negenerického typu. Keď  $\mathbf{X}$  nemá plnú hodnotu ( $\sigma'_p \approx 0$ ), alebo ak  $\sigma'_p \approx \sigma_{p+1}$ , v druhom prípade hľadáme najmenšie  $\sigma_i$ , pre ktoré sa  $v_{p+1,i} \neq 0$ . Pre prvý prípad máme dve možnosti riešenia tohto problému. Jedna z možností je odstrániť závislosť medzi stĺpcami matice  $\mathbf{X}$  tým, že odstránime niektoré jej stĺpce. Stĺpce matice  $\mathbf{X}$ , ktoré potrebujeme odstrániť, čiže závislé premenné (regresory) v modeli určuje pozícia nenulových zložiek  $\mathbf{v}_{p+1}$ . Problém vyberania a vymazávania stĺpcov sa nazýva *výber podmatice*. Potom nám zostane podmatica  $\mathbf{X}_m$  veľkosti  $n \times m$ ,  $m < p$  s plnou hodnotou. Namiesto sústavy  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$  budeme riešiť sústavu  $\mathbf{X}_m\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$ . Druhá možnosť riešenia je vyhradenie obmedzení pre (2.7) a (2.8), tak aby sa dal riešiť.

### 2.3.3 Porovnanie chýb TLS a LS

Na záver kapitoly porovnáme odchýlky odhadov LS a TLS.

**Veta 7.** (*Porovnanie odchýlky LS a TLS odhadu*)

*Nech sa  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{Y}'$  a  $\hat{\mathbf{X}}\boldsymbol{\beta} = \hat{\mathbf{Y}}$ , čiže myslíme LS a TLS aproximáciu množiny rovností  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$ , potom*

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{Y}'\|_2 \geq \|[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - [\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}]\|_F$$

*Dôkaz.* TLS problém prevedieme do LS problému ak  $\mathbf{X} = \hat{\mathbf{X}}$ , potom minimalizovaním už nemôžeme dosiahnuť menšie minimum. Podrobnejšie sa dôkazu venuje pozornosť v [1].

□

## 3. Štatistické vlastnosti TLS

### 3.1 Úvod do problematiky

V tejto kapitole sa venujeme štatistickým vlastnostiam odhadov. Predpokladáme, že všetky chyby systému  $\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \approx \mathbf{Y}$  sú po riadkoch nezávislé, rovnako rozdelené s nulovou strednou hodnotou a s kovariančnou maticou  $\sigma^2\mathbf{I}$ .

Zo štatistických vlastností sme schopní určiť očakávanú kvalitu TLS odhadu. Ukážeme, že TLS je tou najvhodnejšou technikou odhadovania parametrov EIV modelu. Metóda berie všetky pozorovania ako skutočné hodnoty a počíta s chybami v meraní, ktoré prirúča ku skutočnej hodnote. Je potrebné poznať kovariančnú maticu príslušnú k chybe, prípadne jej odhad. Predstavíme podstatné rozdiely v modeloch EIV, regresie a ich zmiešaný typ modelu. Podrobne ukážeme štruktúru chyby, venovať sa budeme aj konzistencii TLS odhadu a asymptotickému rozdeleniu TLS odhadov.

### 3.2 Regresia a EIV model

Uvažujeme model (1.11). Ak  $\boldsymbol{\Theta} \equiv \mathbf{0}$ , potom hovoríme o lineárnej regresii. V prípade, že  $\boldsymbol{\Theta}$  je náhodná veličina hovoríme o EIV modeli.

#### 3.2.1 Čiastočný errors-in-variables model

Čiastočný EIV model z anglického *Partial errors-in-variables (PEIV)* je rozšírením EIV modelu (1.11), niektoré jeho premenné obsahujú chybu a niektoré sú zmerané presne. Je špecifickým prípadom s absolútnym členom, tento model má tvar:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{W}\boldsymbol{\beta}_0 + \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{a} \quad \mathbf{X} = \mathbf{Z} + \boldsymbol{\Theta}, \quad (3.1)$$

kde  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times s}$  je skutočnou a pozorovanou a  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  skutočnou a nenapozorovateľnou konštantou s plnou hodnotou [2].  $\mathbf{Y}$ ,  $\mathbf{X}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a  $\boldsymbol{\Theta}$  sú rovnaké ako v EIV modeli (1.11). Je potrebné odhadnúť regresné parametre  $\boldsymbol{\beta}_0 \in \mathbb{R}^s$  a  $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^p$ .

V prípade, že sa  $n = 0$ , potom hovoríme o modeli klasickej regresie. PEIV model (3.1) je dôležitý z toho hľadiska, že prináša do modelu regresie nenáhodný absolútny člen umiestnením jedného stĺpca matice  $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^\top$  do matice  $\mathbf{W}$ .  $\mathbf{1}$  označuje jednotkový vektor.

### 3.3 Štruktúra chyby a TLS na transformované dáta

V tejto časti bližšie popíšeme štruktúru chýb EIV modelu a ukážeme iné tvary úplnej metódy najmenších štvorcov.

### 3.3.1 Štruktúra chyby (Error structure)

Nech máme daný pravdepodobnostný priestor  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Rozlíšime dve úrovne stavby chyby a to *vnútro-individuálnu* a *medzi-individuálnu* úroveň, ktoré si zhrnieme do jedného predpokladu. Tá prvá spomínaná hovorí, že pre každý riadok platí, že  $[\Theta_{i\cdot}, \varepsilon_i]$  má nulovú strednú hodnotu a nesusingulárnu kovariančnú maticu  $\sigma^2 \mathbf{I}$ , kde  $\sigma^2 > 0$ . Tá druhá bude znázorňovať vzťahy medzi individuálnymi pozorovaniami, teda riadky  $[\Theta_{i\cdot}, \varepsilon_i]$  budú nezávislé a rovnako rozdelené. Tieto dve úrovne stavby chyby si zhrnieme do predpokladu:

$$[\Theta_{i\cdot}, \varepsilon_i] \text{ sú } iid, \text{ majú nulovú strednú hodnotu a kovariančnú maticu } \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (\text{E})$$

kde *iid* značí, že riadky sú nezávislé a rovnako rozdelené a platí  $\sigma^2 > 0$ . Kovariančná matica  $\sigma^2 \mathbf{I}$  je *homoskedastická*, čiže hovoríme o homogenite rozptylov, kde sa matica bude skladať zo zhodných konečných rozptylov. Táto homoskedastická matica môže byť nahradená všeobecnejšou homoskedastickou kovariančnou maticou  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$ , kde  $\mathbf{\Gamma} > 0$ . Pozorované dáta sú násobené druhou odmocninou  $\mathbf{\Gamma}$ , transformované dáta budú mať tvar:

$$[\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}] = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \mathbf{\Gamma}^{-1/2}. \quad (3.2)$$

Z dôvodu, že táto transformácia dát je čisto lineárna, nebudú potrebné ďalšie obmedzenia. Lineárna transformácia  $[\Theta_{i\cdot}, \varepsilon_i] \mathbf{\Gamma}^{-1/2}$  nevyžaduje žiadne dodatočné špecifické predpoklady na rozdelenie chýb, až na existenciu niektorých momentov týchto chýb. Ak sú transformované chyby nezávislé, potom je asymptotické rozdelenie platné aj v homoskedastickom prípade.

Odhad metódou TLS (2.14) môžeme prepísať do tvaru *zovšeobecnenej úplnej metódy najmenších štvorcov*, z anglického *generalized total least square (GTLS)* bude vyzeráť nasledovne:

$$\hat{\beta}_{GTLS} = (\tilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\mathbf{X}} - \sigma_{p+1, [\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}]}^2 \mathbf{I})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^\top \tilde{\mathbf{Y}}, \quad (3.3)$$

kde  $\sigma_{p+1, [\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}]}$  je  $p+1$ -vou singulárnou hodnotou transformovanej dátovej matice  $[\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}]$  (viď [2]). V prípade, že kovariančnú maticu  $\mathbf{\Gamma}$  nepoznáme, môžeme ju odhadnúť pomocou opakovaného pozorovania. Vzniká zložitejšia forma modelu EIV:

$$\mathbf{Y}_l = \mathbf{Z} \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_l \quad a \quad \mathbf{X}_l = \mathbf{Z} + \boldsymbol{\Theta}_l, \quad l = 1, \dots, r. \quad (3.4)$$

Model sa spomína aj v [2] a  $r \in \mathbb{N}$  značí počet opakovaní. Informácie k odhadnutiu kovariančnej matice získame z opakovaní a všeobecná kovariančná matica  $\boldsymbol{\Sigma}$  medzi-individuálnych chýb bude mať odhad

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r [\mathbf{X}_i, \mathbf{Y}_i]^\top \left[ (\delta_{ij} - \frac{1}{r}) \mathbf{I} \right] [\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_j], \quad (3.5)$$

kde  $\delta_{ij}$  značí Kroneckerovo delta [2]. Použitím značenia z (3.4), môžeme rovnosť (3.5) prepísať do tvaru, ktorý lepšie vyjadří zmysel odhadu. Rovnosť vyzerá nasledovne:

$$\hat{\mathbf{\Gamma}} = \frac{1}{nr} \sum_{i=1}^r [\boldsymbol{\Theta}_i, \varepsilon_i]^\top [\boldsymbol{\Theta}_i, \varepsilon_i] - \frac{1}{nr(r-1)} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1, j \neq i}^r [\boldsymbol{\Theta}_i, \varepsilon_i]^\top [\boldsymbol{\Theta}_j, \varepsilon_j]. \quad (3.6)$$

Na medzi-individuálnej úrovni chýb nám vzniká podobná situácia, ak existujú *vyrovnávacie matice* z anglického názvu *equilibration matrices*  $\mathbf{\Upsilon} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  a  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{(p+1) \times (p+1)}$ , ktoré zaopatrujú na oboch úrovniach chýb, že chyby  $\mathbf{\Upsilon}^{-1/2}[\mathbf{\Theta}, \mathbf{\epsilon}]\mathbf{\Gamma}^{-1/2}$  budú nezávislé a rovnako rozdelené. Použitie TLS odhadu (2.14) na transformované dáta  $\mathbf{\Upsilon}^{1/2}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\mathbf{\Gamma}^{-1/2}$  má nasledovný tvar:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{ETLS} = (\tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{\Upsilon}^{-1} - \sigma_{p+1, \mathbf{\Upsilon}^{-1/2}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\mathbf{\Gamma}^{-1/2}}^2 \mathbf{I})^{-1} \tilde{\mathbf{X}}^\top \mathbf{\Upsilon}^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}, \quad (3.7)$$

kde  $\sigma_{p+1, [\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{Y}}]}$  je  $(p+1)$ -vou singulárnou hodnotou transformovaných dát transformovanej matice  $\mathbf{\Upsilon}^{-1/2}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]\mathbf{\Gamma}^{-1/2}$ , čo je taktiež spomínané v [2].

### 3.4 Nekonzistencia OLS

Odhad LS metódou  $\boldsymbol{\beta}'$  je nekonzistentný odhad parametru  $\boldsymbol{\beta}$ . Odhad  $\boldsymbol{\beta}' = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{Y}$  za všeobecných podmienok nekonverguje v pravdepodobnosti k  $\boldsymbol{\beta}$ , čo dokázal Gallo v [8] s využitím [9], pretože platí

$$\boldsymbol{\beta}' \xrightarrow{P} [\mathbf{I} - (\frac{1}{n} \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \sigma^2 \mathbf{I}] \boldsymbol{\beta} + (\frac{1}{n} \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \sigma^2 \mathbf{I}, \quad (3.8)$$

teda

$$\boldsymbol{\beta}' - \boldsymbol{\beta} \xrightarrow{P} -\sigma^2 (\frac{1}{n} \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} + \sigma^2 \mathbf{I})^{-1} \boldsymbol{\beta} \quad (3.9)$$

Zo vzťahu (3.9) nám vyplýva, že odhad LS je nekonzistentný.

### 3.5 Konzistencia TLS

V tejto časti sa budeme zaoberať asymptotickými vlastnosťami odhadu  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  a EIV parametrami z hľadiska konzistencie. Asymptotické vlastnosti odhadov sú ich základnými charakteristikami a vieme z nich odvodiť kvalitu odhadu. Z dostatočného množstva pozorovaní, ak odhad konverguje v pravdepodobnosti ku skutočnej hodnote, vieme, že odhad je blízka hodnota k tej skutočnej. Na zabezpečenie konzistencie  $[\mathbf{\Theta}, \mathbf{\epsilon}]$  nám stačí predpoklad (E), ktorý sme uviedli v odstavci (3.3.1). Ďalej predpokladáme

$$\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} \quad \text{je pozitívne definitná.} \quad (3.10)$$

Dôležitosť predpokladu (3.10) spočíva v tom, že ak limita z predpokladu je nekonečno, potom rozptyl TLS odhadu (2.14) ide k nule, čo nie je prípustné. Z predpokladu (3.10) plynie aj existencia *asymptotickej strednej hodnoty*  $\boldsymbol{\mu}$ , ktorá má tvar:

$$\boldsymbol{\mu} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\mathbf{Z}, \mathbf{Z}\boldsymbol{\beta}]^\top \mathbf{I}. \quad (3.11)$$

Pred tým ako ukážeme silnú konzistenciu v EIV modeli, definujeme  $\hat{\sigma}^2$ . Odhad  $\hat{\sigma}^2$  je silným konzistentným odhadom neznámeho homoskedastického rozptylu chýb  $\sigma^2$ , teda rozptylu chýb v dátach  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$ ,

$$\hat{\sigma}^2 := \frac{\sigma_{p+1}^2}{n}. \quad (3.12)$$

**Veta 8.** (Silná konzistencia v EIV modeli s nezávislými chybami).

Nech máme EIV model (1.11),  $\Delta$  a  $\mu$  je definovaná ako v (3.10) a (3.11). Nech SVD  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  je  $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\top$  a platí predpoklad (E), potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\top [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = \mathbf{\Omega} = \sigma^2 \mathbf{I} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\mathbf{Z}, \mathbf{Z}\beta]^\top [\mathbf{Z}, \mathbf{Z}\beta] \quad (3.13)$$

s pravdepodobnosťou 1,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\top \mathbf{I} = \mu \quad \text{s pravdepodobnosťou 1,} \quad (3.14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Sigma^\top \Sigma = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_{p+1}) \quad \text{s pravdepodobnosťou 1,} \quad (3.15)$$

kde  $\omega_i$  sú vlastnými číslami  $\mathbf{\Omega}$ , čiže

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Sigma^\top \Sigma = \sigma^2 \mathbf{I} \quad \text{s pravdepodobnosťou 1,} \quad (3.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\sigma}^2 = \sigma^2 \quad \text{s pravdepodobnosťou 1.} \quad (3.17)$$

Za platnosti predpokladov (E) a (3.10) platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\beta} = \beta \quad \text{s pravdepodobnosťou 1.} \quad (3.18)$$

*Dôkaz.* Dôkaz tejto vety nájdeme v [7]. □

V nasledujúcej časti podrobnejšie rozoberieme Vetu 8:

Z rovnosti (3.14) vyplýva, že silno konzistentným odhadom asymptotického priemeru nenapozorovateľných stĺpcov  $\mathbf{Z}$  a  $\mathbf{Z}\beta$  je aritmetický priemer stĺpcov  $\mathbf{X}$  a  $\mathbf{Y}$ .

Druhá mocnina najmenšieho singulárneho čísla  $\sigma_{p+1}^2$  matice  $[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$  je jeho silne konzistentný odhad  $n\sigma^2$ , to nám plyní z (3.13), (3.15) a (3.16), inak:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{p+1}^2}{n} = \sigma^2 \quad \text{s pravdepodobnosťou 1.} \quad (3.19)$$

Ďalej z rovnosti (3.18) vidíme, že odhad metódou TLS  $\hat{\beta}$  je silno konzistentným odhadom  $\beta$ , to znamená, že  $\hat{\beta}$  konverguje ku skutočnému parametru  $\beta$  s rastúcim stupňom predeterminácie.

Predpoklady (E) a (3.10) zabezpečujú, že metódou TLS dokážeme odhadnúť kovariančnú maticu chýb  $[\Theta, \epsilon]$ .

Za predpokladu, že (3.10) platí:

$$\frac{1}{n} (\mathbf{X}^\top \mathbf{X} - \sigma_{p+1}^2 \mathbf{I}) \rightarrow \Delta, \quad \text{s pravdepodobnosťou 1,} \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

Predpoklady (E) a (3.10) sú príliš obmedzujúce, predpoklad (E) vyžaduje aby všetky merania  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  obsahovali chyby a tie chyby boli nekorelované a rovnakej veľkosti. Pri nesplnení týchto predpokladov nemôžeme hovoriť o konzistentnom odhade parametrov TLS riešenia sústavy  $\mathbf{X}\beta \approx \mathbf{Y}$ . Predpoklady sú silnejšie ako

tie, ktoré postačia na konzistenciu odhadu lineárnej regresie. Potrebujeme oslabiť tieto predpoklady. Podstatná podmienka pre  $\mathbf{Z}$  má tvar:

$$\lambda_{\min}(\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z}) \rightarrow \infty \quad \text{kde} \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.21)$$

kde  $\lambda_{\min}$  značí minimálne vlastné čísla  $\mathbf{Z}$ , podmienka (3.21) je slabšia ako podmienka (3.10) [1]. Predpoklad (3.21) hovorí len o tom, že nezávislé premenné nemajú byť medzi sebou vysoko korelované.

Definujeme si konečnosť štvrtého momentu riadkov  $[\Theta, \epsilon]$ , kde pre každé  $i \in \{1, \dots, n\}$  je

$$\mathbb{E} \prod_{\Sigma_j r_j = 4} \omega_{ij}^{r_j} < \infty, \quad \omega_{ij} \in \{\Theta_{i,1}, \dots, \Theta_{i,p}, \epsilon_i\}, r_j \in \mathbb{N}.$$

Z predpokladov (3.10) a (3.21) plynie *slabá veta o konzistencii*.

**Veta 9.** (*Slabá konzistencia v EIV modeli s nezávislými chybami*).

*Za predpokladu, že rozdelenie riadkov  $[\Theta, \epsilon]$  má štvrtý moment konečný a tiež ak platí*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \lambda_{\min}(\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z}) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.22)$$

$$\frac{\lambda_{\min}^2(\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})}{\lambda_{\max}(\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.23)$$

$\lambda_{\min}$  značí minimálne a  $\lambda_{\max}$  maximálne vlastné číslo spojeného rozdelenia chýb  $[\Theta, \epsilon]$ . Za predpokladu, že štvrtý moment je konečný, potom slabým konzistentným odhadom  $\beta$  bude

$$\hat{\beta} \xrightarrow{P} \beta, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.24)$$

*Dôkaz.* Dôkaz tejto vety nájdeme v [8] □

Oba predpoklady (3.22) a (3.23) vyplývajú z (3.10). Zároveň z oboch predpokladov zvlášť vyplýva podmienka (3.21). Zosilnením predpokladu (3.22) môžeme nahradiť potrebu konečnosti štvrtého momentu.

## 3.6 Asymptotické rozdelenie

Konzistenčné vlastnosti sú dôležité, ale pri testovaní hypotéz je nevyhnutné poznať rozdelenie odhadov. Kvôli jednoduchosti budeme uvažovať len o asymptotických rozdeleniach. Za predpokladov (E), (3.10) a tiež za predpokladu konečného štvrtého momentu rozdelenia  $[\Theta, \epsilon]$ , zložky  $1/\sqrt{n}\{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\top [\mathbf{X}, \mathbf{Y}] - \mathbb{E}([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\top [\mathbf{X}, \mathbf{Y}])\}$  a  $1/\sqrt{n}[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\top \mathbf{I} - [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]^\top \mathbf{I}$  v prípade čiastočného EIV modelu, majú symetrické asymptotické normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou. Asymptotické rozdelenie  $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$  a  $\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)$  má mnohorozmerné normálne a normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou.

**Veta 10.** (*Asymptotické rozdelenie TLS riešenia (EIV)*)

*Nech máme model EIV (1.11) a za predpokladu (E). Ak platí (3.10) a tiež štvrtý moment riadkov  $[\Theta, \epsilon]$  je konečný, potom  $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$  má asymptotické normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou pri  $n \rightarrow \infty$ , ak naviac tretí*

a štvrtý moment rozdelenia riadkov  $[\Theta, \varepsilon]$  sa zhoduje s momentmi normálneho rozdelenia, potom  $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$  má asymptotické normálne rozdelenie s nulovou strednou hodnotou a kovariančnou maticou:

$$\sigma^2(1 + \beta^\top \beta) \Delta^{-1} + \sigma^2 \Delta ([\mathbf{I}, \beta][\mathbf{I}, \beta]^\top)^{-1} \Delta^{-1} \quad (3.25)$$

*Dôkaz.* Dôkaz tejto vety nájdeme v [8] □

Pre asymptotickú normalitu  $\hat{\beta}$  nie je potrebný predpoklad toho, že momenty chýb sa zhodujú s momentmi s normálnym rozdelením. Asymptotický rozptyl závisí na štvrtom a treťom momente.

Ak množstvo šumu je malé a platí (E), potom kovariančná matica TLS odhadu  $\hat{\beta}$  môžeme aproximovať

$$\text{cov}(\hat{\beta}) \approx \frac{1}{n} [\beta^\top, -1] \sigma^2 \mathbf{I} [\beta^\top, -1]^\top \left( \frac{1}{n} \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} \right)^{-1}. \quad (3.26)$$

Ak  $n$  bude konečné,  $\text{cov}(\hat{\beta})$  môže aproximovať odhadmi  $\hat{\beta}$ ,  $\sigma_{p+1}^2$  a  $\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} - \sigma_{p+1}^2 \mathbf{I}$  skutočných parametrov  $\beta$ ,  $\sigma^2$  a  $\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z}$ , čiže

$$\text{cov}(\hat{\beta}) \approx \frac{1}{n} [\beta^\top, -1] \frac{\sigma_{p+1}^2}{n} \mathbf{I} [\beta^\top, -1]^\top \left( \frac{1}{n} \mathbf{Z}^\top \mathbf{Z} - \sigma_{p+1}^2 \mathbf{I} \right)^{-1}. \quad (3.27)$$

Týmto problémom sa podrobnejšie zaoberajú v [1].

Asymptotický rozptyl  $\hat{\beta}$  musí byť vyšší ako asymptotický rozptyl nekonzistentného odhadu  $\beta'$  metódy LS určený

$$\text{cov}(\beta') = \sigma^2 (\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1}. \quad (3.28)$$

V čiastočnom EIV modeli (3.1), kde  $\mathbf{M} = \sigma^2 (\mathbf{I} + \beta \beta^\top)^{-1}$ , sú  $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta)$ ,  $\text{cov}(\hat{\beta})$ ,  $\text{cov}(\beta')$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{X}^\top \mathbf{X} - n\sigma^2 \mathbf{I}$  nahradené  $\sqrt{n}[\hat{\beta}_0 - \beta_0]$ ,  $\text{cov}([\hat{\beta}_0])$ ,  $\text{cov}([\beta'_0])$ ,  $[\mathbf{1}, \mathbf{Z}]$ ,  $[\frac{0}{\sigma^2} \frac{0}{\mathbf{M}}]$  a  $[\mathbf{1}, \mathbf{X}]^\top [\mathbf{1}, \mathbf{X}] - n\sigma^2 [\frac{0}{\sigma^2} \frac{0}{\mathbf{I}}]$  pri použití rovností (3.26) a (3.27), ktoré sú zjednodušením predpokladu (E).

Kovariančná matica odhadu  $\hat{\beta}$  je väčšia (v zmysle definitnosti) ako kovariančná matica odhadu  $\beta'$ , čo vidíme z rovností (3.26) a (3.28).

### 3.7 Praktická závažnosť

Zhodnotili sme kvalitu odhadovania parametrov v EIV modeli tým, že sme ukázali a overili asymptotické vlastnosti tohto modelu. Model je platný pre veľké testové modely, kde je potrebné moderovanie veľkosti vzoriek. Podľa experimentálnej simulácie Van Huffela a Vandewalle sa zistilo, že momenty asymptotických rozdelení LS odhadu sú vhodnou aproximáciou pre konečnú vzorku momentov simulácií (minimálne pre 20 pozorovaní).

Takisto sa simuláciou ukázalo, že konzistenčné vlastnosti TLS riešenia modelujú dostatočne vhodne veľké testové vzorky. Budeme porovnávať presnosť TLS a LS riešenia s ohľadom na ich vychýlenie, rozptyl a MSE.

$$\text{MSE}(\hat{\beta}) = E((\hat{\beta} - \beta)^\top (\hat{\beta} - \beta)) \quad (3.29)$$

$$\text{MSE}(\hat{\beta}) = E((\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))^\top (\hat{\beta} - E(\hat{\beta}))) + (E(\hat{\beta}) - \beta)^\top E(\hat{\beta} - \beta)$$

$$MSE(\hat{\beta}) = \text{rozptyl}(\hat{\beta}) + \text{vychýlenie}^2(\hat{\beta}) \quad (3.30)$$

Porovnáme si metódy LS a TLS pri rastúcom stupni predeterminácie:

Z dôvodov asymptotickej nestrannosti TLS, pri klesajúcom  $n$  vychýlenie TLS je menšie ako LS. S rastúcim  $n$  tento rozdiel narastá.

Rozptyl TLS je väčší ako LS aj pri rastúcej hodnote  $n$ .

MSE kombinuje efekt vychýlenia a variability, ako vidíme aj v rovnosti (3.30). Pri nižšej hodnote  $n$  je hodnota vychýlenia tiež nižšia a je nižšia aj ako hodnota rozptylu. V porovnaní rozptylov TLS a LS je ten prvý väčší, ale stále zostávajú metódy za týchto okolností porovnateľné. Zvyšujúcou sa hodnotou  $n$  sa rozdiely v MSE zvyšujú v prospech TLS. TLS sa opäť ukázala ako presnejšia, pri zvýšenej predeterminácii je hodnota MSE pre TLS nižšia ako pre LS.

Kvôli menšiemu MSE môžeme povedať, že TLS dáva lepší odhad skutočného parametra  $\beta$  ako metóda LS v EIV modeli. Pre menšie vzorky rozdiel v riešeníach LS a TLS nie je veľký. TLS má v tomto prípade väčší rozptyl, ale pri zvyšujúcom sa  $n$  je presnosť TLS vyššia ako pri LS. Výraznosť presnosti rozdielu TLS a LS v EIV modeloch je väčšia pri odhadovaní parametru  $\beta$ .



## 4. Simulácie

Budeme porovnávať presnosť metód LS a TLS simulovaním MSE a pozorovaním jeho hodnôt pre obe metódy. Sledujeme ako sa mení hodnota s rastúcim počtom pozorovaní, taktiež nás budú zaujímať hodnoty MSE pre rôzne rozdelenia chýb a rôzne hodnoty  $\beta$  pre  $p = 1$ , pre viac druhov rozptylov chýb  $[\Theta_i, \varepsilon_i], i = 1, \dots, n$ . Vyberieme vhodný model  $Z_i, i = 1, \dots, n$ , ktorý bude spĺňať podmienku (3.10). Voľbou rôznych modelov  $Z_i$ , rôznych rozdelení chýb a tiež  $\beta$ , chceme ukázať hodnoty MSE za čo najrôznejších podmienok. Ďalej vypočítame dvojicu  $[X_i, Y_i], i = 1, \dots, n$  a odhad  $\beta$  metódou LS a metódou TLS. MSE vypočítame z poslednej rovnosti (3.30), kde za rozptyl (var) použijeme jeho odhad:

$$\widehat{var}(\hat{\beta}) = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (\hat{\beta}_i - m^{-1} \sum_{i=1}^m \hat{\beta}_i)^2,$$

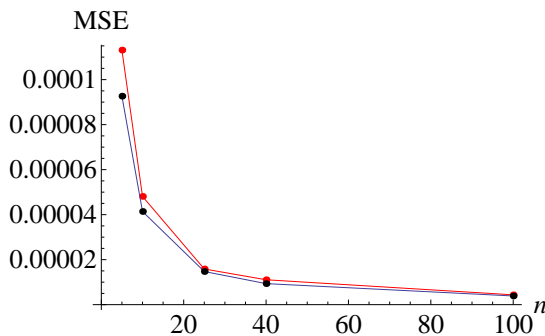
kde  $\hat{\beta}$  značí odhad  $\beta$  a vychýlenie (bias) nahradíme jeho odhadom, ktorý získame z rozdielu nášho zvoleného  $\beta$  a odhadu strednej hodnoty  $\beta$

$$\widehat{bias}(\hat{\beta}) = \beta - m^{-1} \sum_{i=1}^m \hat{\beta}_i.$$

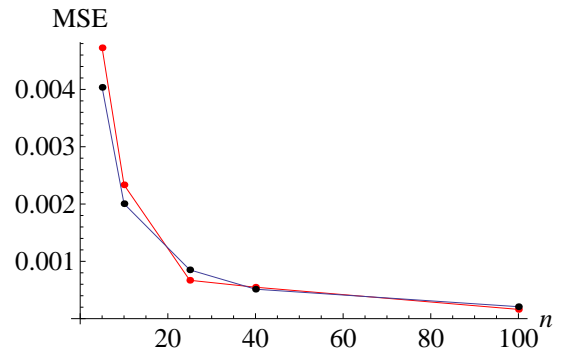
Za  $m$ , ktoré značí počet simulácií, si zvolíme hodnotu 100, pretože je to dostatočne veľká vzorka pre naše zvolené  $n$ , čo budú hodnoty 5, 10, 25, 40 a 100.

### 4.1 Chyby s normálnym rozdelením

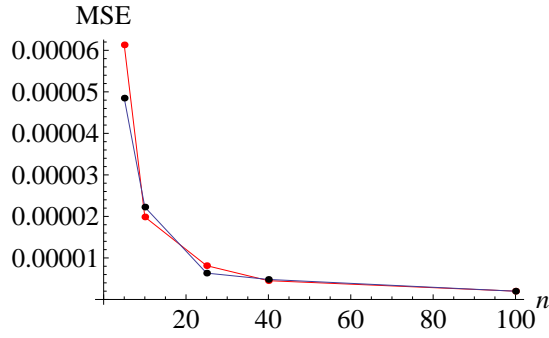
Budeme simulovať hodnoty MSE s rôznymi hodnotami  $\beta = 0.1, 1, 10$  a so zhodnými rozptylmi  $Var[\varepsilon_i] = Var[\Theta_{i,j}] = \sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\Theta^2$  chýb s hodnotou 0.01 s normálnym rozdelením, s modelmi  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}$  a  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}$  v závislosti na rastúcej hodnote  $n$ . Za  $n$  dosadzujeme hodnoty 5, 10, 25, 40 a 100. Metódu LS značíme červenou a metódu TLS modrou farbou.



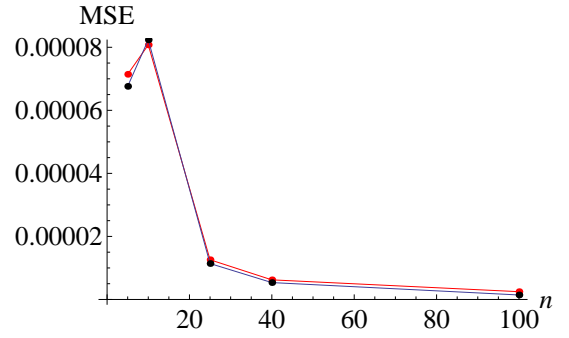
Obr. 4.1:  $\beta = 1, Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}$



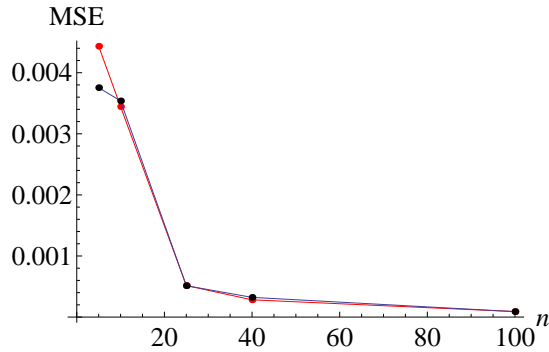
Obr. 4.2:  $\beta = 10, Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}$



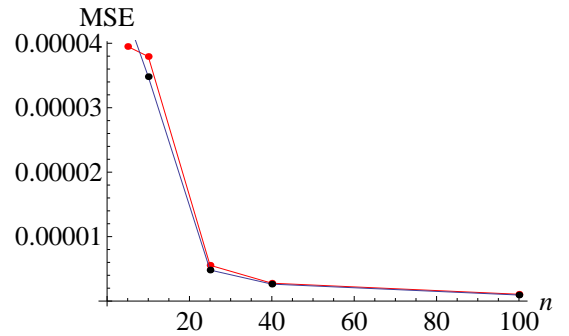
Obr. 4.3:  $\beta = 0.1, Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}$



Obr. 4.4:  $\beta = 1, Z_i = \sqrt{1 - 1/i}$



Obr. 4.5:  $\beta = 10, Z_i = \sqrt{1 - 1/i}$



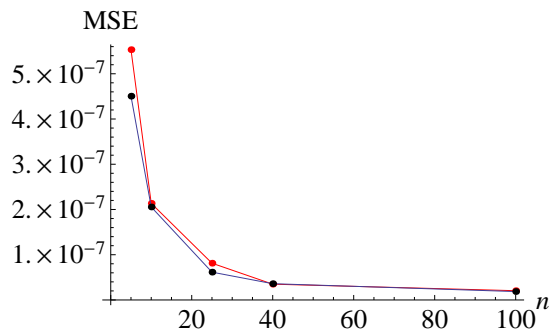
Obr. 4.6:  $\beta = 0.1, Z_i = \sqrt{1 - 1/i}$

Pre prvý model vo všetkých prípadoch hodnoty MSE s rastúcim  $n$  klesajú. Pre  $\beta = 1$  pri nižších hodnotách  $n$  je MSE pre TLS nižšie. Pre ostatné hodnoty  $\beta$  sú hodnoty MSE nie vždy pre metódu TLS nižšie. Prevažne sú hodnoty MSE pre TLS metódu nižšie ako pre LS. Pre vyššie hodnoty  $n$  sa líšia minimálne.

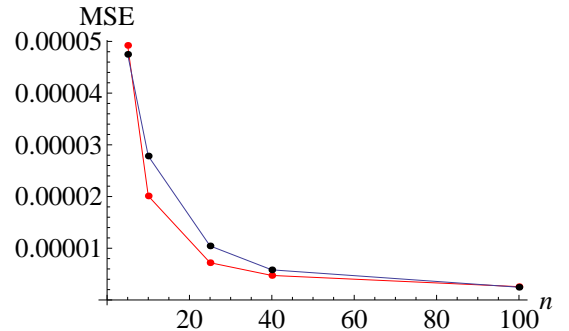
V prípade druhého modelu  $Z_i$  budú hodnoty MSE pre obe metódy podobné. Líšiť sa budú pre menšie hodnoty  $n$ .

Pre oba modely pre  $\beta = 10$  sú hodnoty MSE výrazne vyššie.

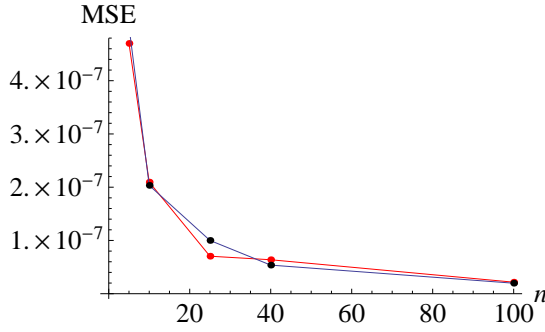
V prípade, že zmeníme hodnoty rozptylov  $\sigma_\Theta$  a  $\sigma_\epsilon$  na 0.001, pre oba spomínané modely  $Z_i$ .



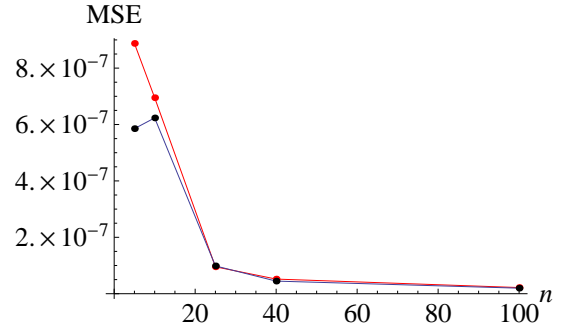
Obr. 4.7:  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}, \beta = 1$



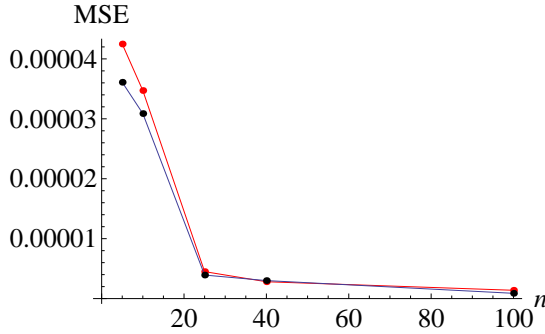
Obr. 4.8:  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}, \beta = 10$



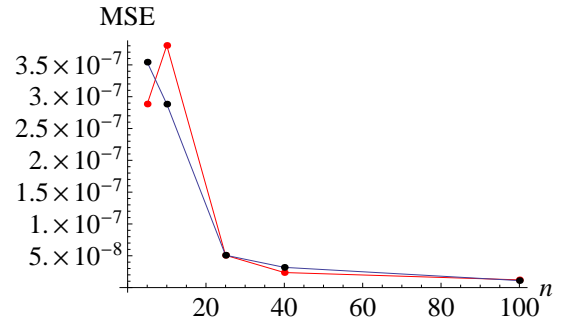
Obr. 4.9:  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}, \beta = 0.1$



Obr. 4.10:  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}, \beta = 1$



Obr. 4.11:  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}, \beta = 10$



Obr. 4.12:  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}, \beta = 0.1$

Pre model  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}$  sú hodnoty MSE pre metódu TLS nižšie ako pre LS, pre vyššie hodnoty  $n$  sa rozdiel znižuje.

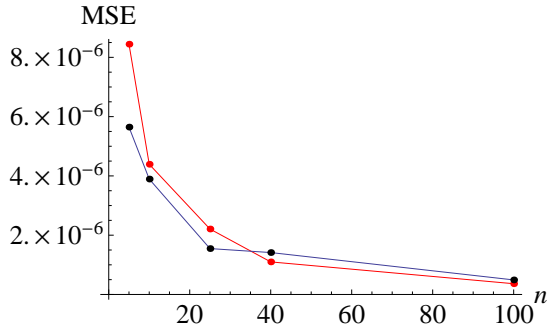
Pri modeli  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}$  pre vyššie hodnoty  $n$  sa hodnoty MSE pre obe metódy výrazne nelíšia. Pre nízke hodnoty  $n$ , pre hodnoty  $\beta = 10$  a  $1$  sú hodnoty vyššie pre metódu LS.

V oboch prípadoch modelov pre  $\beta = 10$  sú hodnoty MSE výrazne vyššie a v porovnaní s predchádzajúcimi simuláciami, kde sme mali rozptyly chýb s hodnotou  $0.01$ , sú hodnoty MSE nižšie približne o dve desatinné miesta.

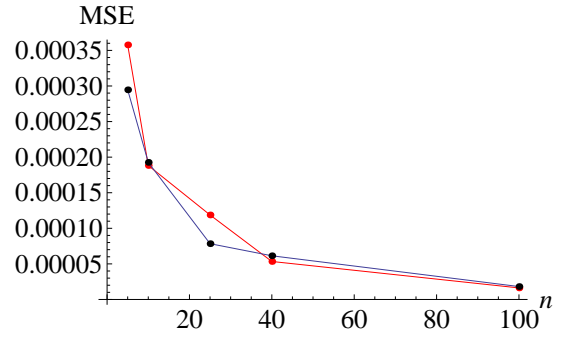
## 4.2 Chyby s centrovaným gamma rozdelením

Pri simulovaní chýb s gamma rozdelením nemôžeme použiť za strednú hodnotu  $0$ . Stredná hodnota gamma rozdelenia musí byť kladná. Musíme toto rozdelenie posunúť. Posunuté rozdelenie nazývame *centrovaným gamma rozdelením*. Najprv si vygenerujeme chyby s gamma rozdelením s ľubovoľnou strednou hodnotou (napr.  $0.1$ ) a rozptylom v našom prípade s hodnotami  $0.01$  a  $0.001$  a od týchto hodnôt odčítame strednú hodnotu s rovnakou strednou hodnotou a rozptylom a tak dostaneme centrované gamma rozdelenie.

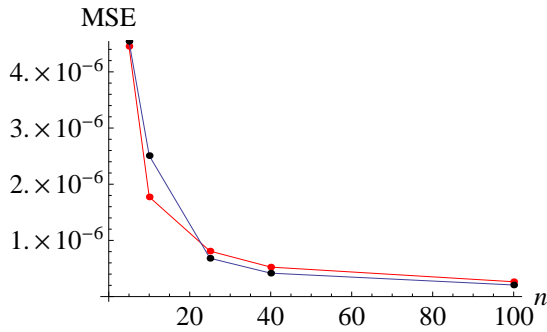
Ďalej budeme simulovať dáta s chybami s centrovaným gamma rozdelením a s rozptylmi s hodnotou  $0.01$ .



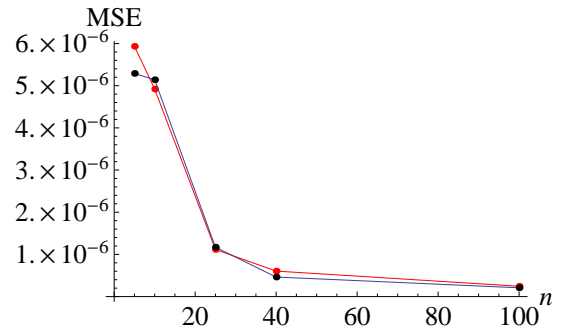
Obr. 4.13:  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}, \beta = 1$



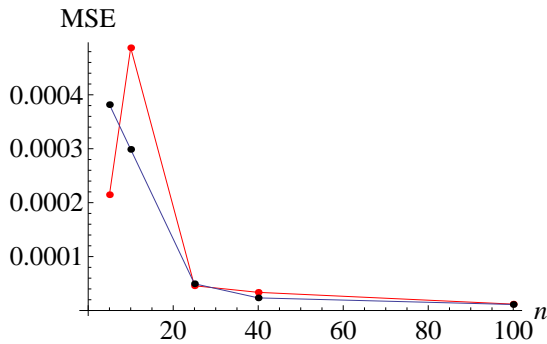
Obr. 4.14:  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}, \beta = 10$



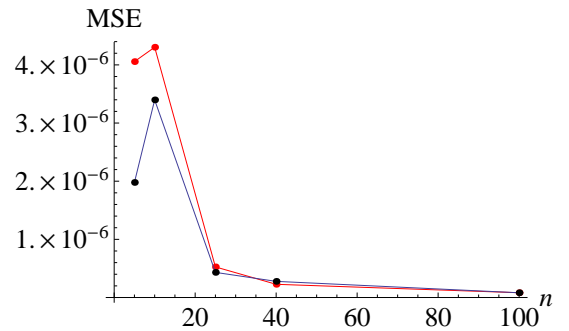
Obr. 4.15:  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}, \beta = 0.1$



Obr. 4.16:  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}, \beta = 1$



Obr. 4.17:  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}, \beta = 10$

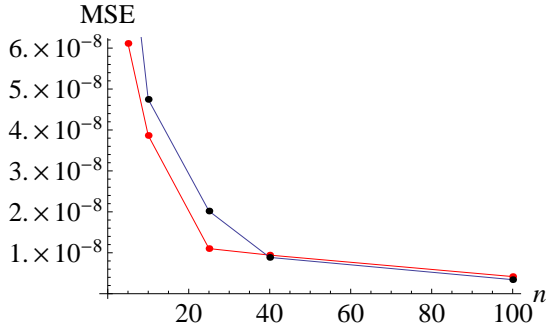


Obr. 4.18:  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}, \beta = 0.1$

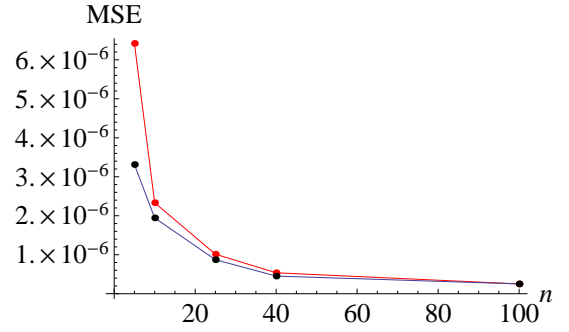
Hodnoty MSE pre prvý model  $Z_i$  budú v prípade  $\beta = 1$  pre nižšie hodnoty  $n$  pre TLS metódu nižšie, čo sa s rastúcim  $n$  obráti a budú nižšie hodnoty pre LS. V prípade  $\beta = 10$  vo vyšších hodnotách  $n$  bude MSE len o málo nižšie pre metódu LS. Jedine pre  $\beta = 0.1$  sú hodnoty MSE pre TLS pre vyššie  $n$  nižšie.

Pre druhý  $Z_i$  model pre nízke hodnoty  $n$  budú hodnoty MSE nižšie so zvyšujúcou sa hodnotou  $n$  rozdiel medzi týmito hodnotami bude veľmi malý.

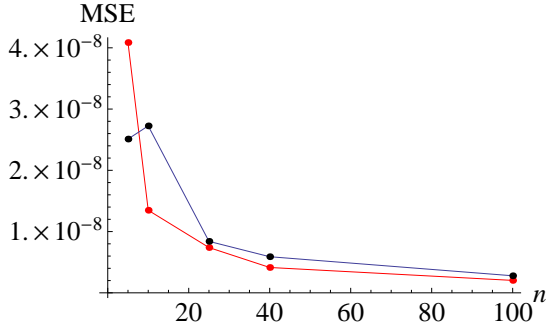
Ak zmeníme hodnoty rozptylov na 0.001, závislosť MSE na  $n$  bude vyzerat nasledovne.



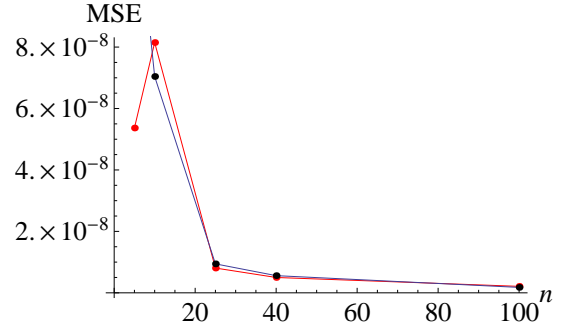
Obr. 4.19:  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}, \beta = 1$



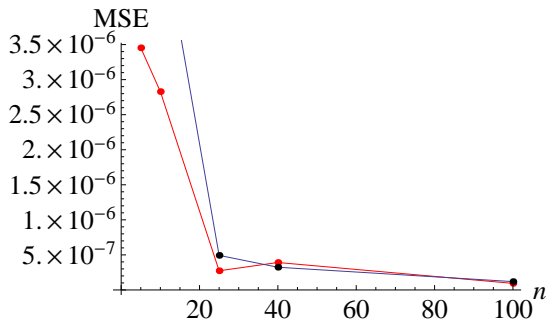
Obr. 4.20:  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}, \beta = 10$



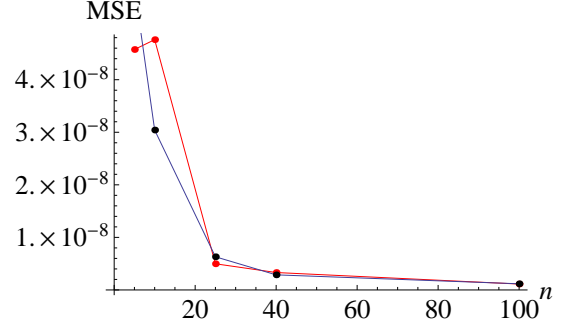
Obr. 4.21:  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}, \beta = 0.1$



Obr. 4.22:  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}, \beta = 1$



Obr. 4.23:  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}, \beta = 10$



Obr. 4.24:  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}, \beta = 0.1$

V prípade prvého spomínaného modelu, sú hodnoty MSE nižšie pre metódu TLS, rozdiel sa so zvyšujúcim  $n$  minimalizuje. Jedine v prípade  $\beta = 0.1$  pre malé  $n$  je hodnota MSE pre LS nižšia.

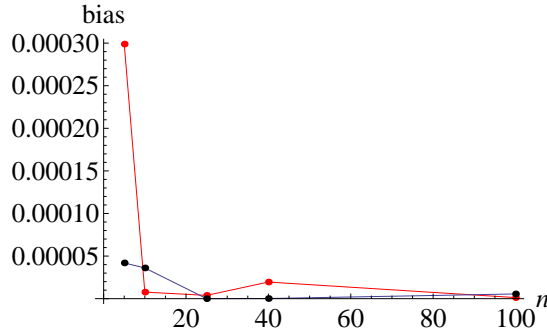
Pre druhý model sú pre malé hodnoty  $n$  nižšie hodnoty MSE pre metódu TLS, pri vyšších hodnotách  $n$  je rozdiel medzi hodnotami MSE oboch metód malý.

Hodnoty MSE s chybami s centrovaním gamma rozdelením pre  $\beta = 10$  sú výrazne nižšie. Hodnoty MSE s rozptylnými chybami 0.01 sú vyššie ako tie s 0.001.

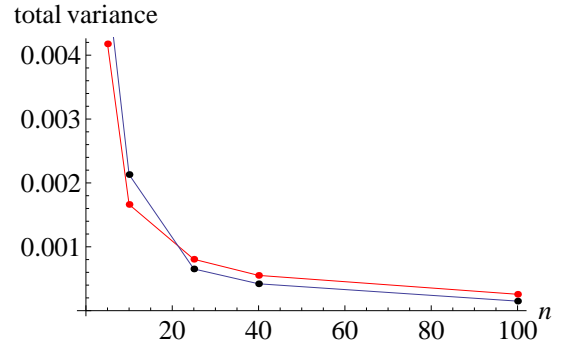
## 4.3 Vychýlenie a rozptyl

Pre niektoré prípady ukážeme zvlášť hodnoty vychýlenia a rozptylu odhadov, pre metódu LS aj TLS.

V prípade chyby s normálnym rozdelením, s rozptylnými s hodnotou 0.01 a pre  $\beta = 10$  a  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}$  vyzerá nasledovne:



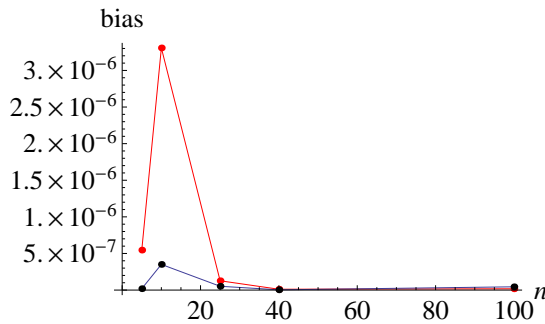
Obr. 4.25: vychýlenie



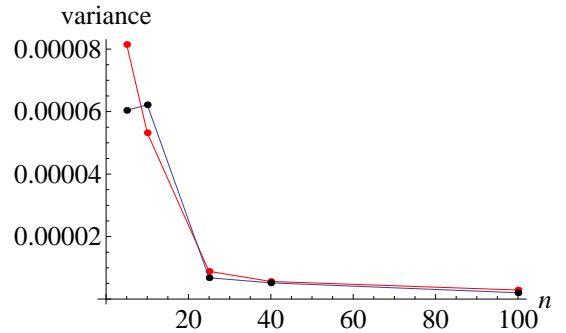
Obr. 4.26: rozptyl

Na obrázku vidíme, že hodnoty rozptylu sú vyššie približne o jedno desatinné miesto v porovnaní s vychýlením. Obe hodnoty sú nižšie prevažne pre metódu TLS, výraznejšie pri vyšších hodnotách  $n$ .

Ak zmeníme model  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}$  a  $\beta = 1$ , potom bude vychýlenie a rozptyl vyzerat' nasledovne:



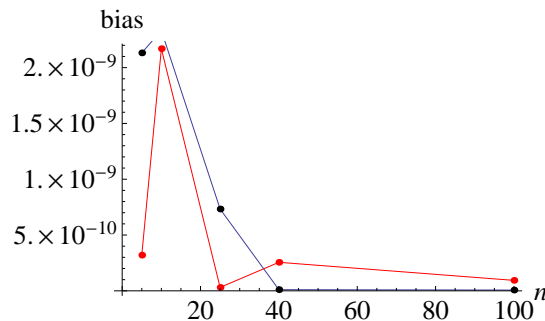
Obr. 4.27: vychýlenie



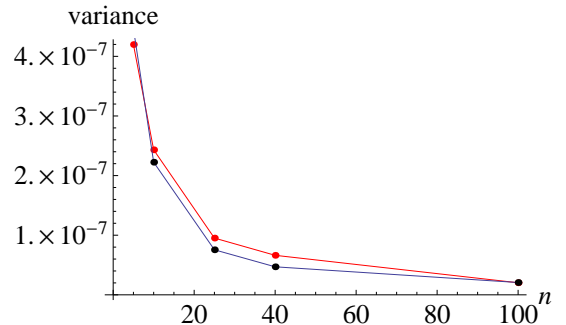
Obr. 4.28: rozptyl

Hodnoty vychýlenia sú výrazne nižšie najmä pre väčšie hodnoty  $n$ . Pre obe metódy sa hodnoty výraznejšie líšia pre nižšie hodnoty  $n$ .

Vychýlenie a rozptyl pre chyby s normálnym rozdelením s rozptylmi 0.001 a s modelom  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}$  a  $\beta = 0.1$  vyzerá:



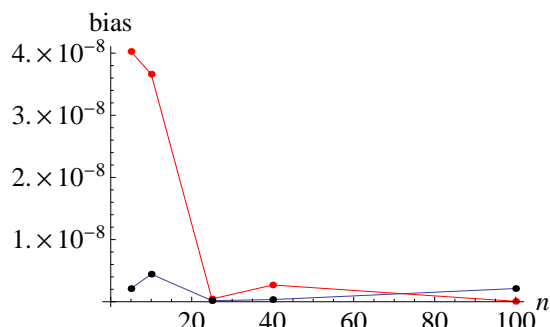
Obr. 4.29: vychýlenie



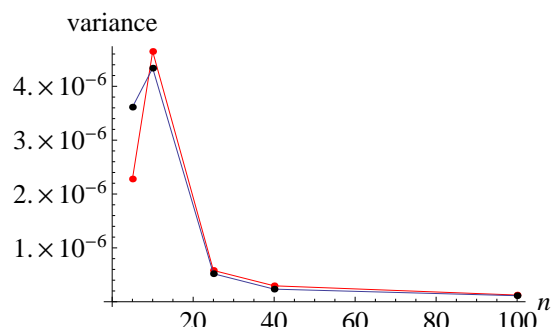
Obr. 4.30: rozptyl

Pre metódu TLS je vychýlenie výrazne vyššie pre malé  $n$  a vyššie pre veľké  $n$ . Rozptyl je prevažne nižší pre TLS.

Pre rozdelenie chýb s centrovaným gamma rozdelením s rozptylmi 0.01 s modelom  $Z_i = \sqrt{1 - 1/i}$  a  $\beta = 0.1$  vychýlenie a rozptyl vyzerajú nasledovne:

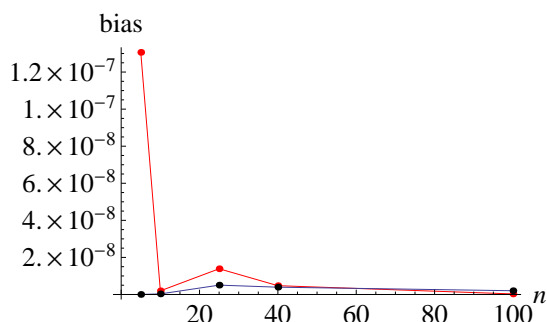


Obr. 4.31: vychýlenie

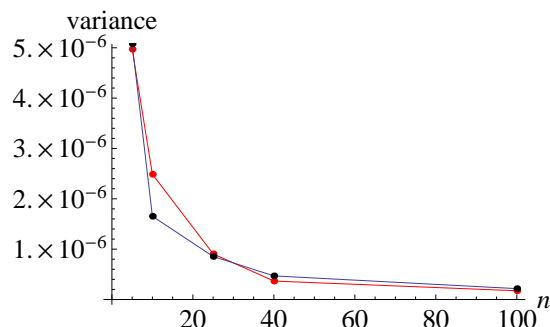


Obr. 4.32: rozptyl

V tomto prípade je rozdiel hodnôt vychýlenia a rozptylu ešte výraznejší, pre TLS metódu pre malé  $n$  majú pre vychýlenie aj rozptyl nižšiu hodnotu ako pre LS metódu a to isté bude platiť aj v prípade ak zmeníme hodnotu rozptylov chýb na 0.001 a model bude  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}$  a  $\beta = 10$ .



Obr. 4.33: vychýlenie

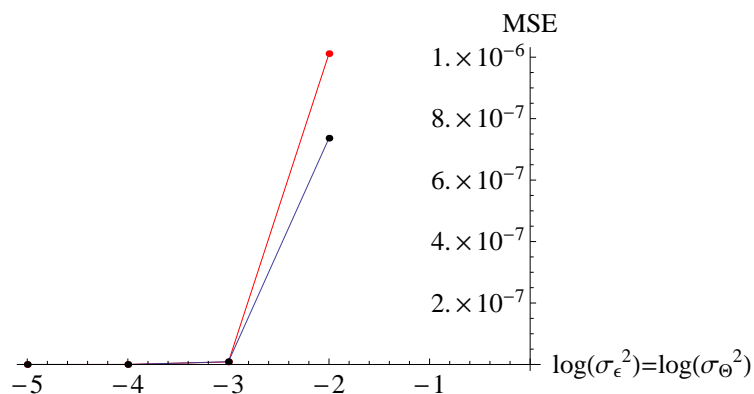


Obr. 4.34: rozptyl

## 4.4 Závislosť MSE, vychýlenia a rozptylu na $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\Theta^2$

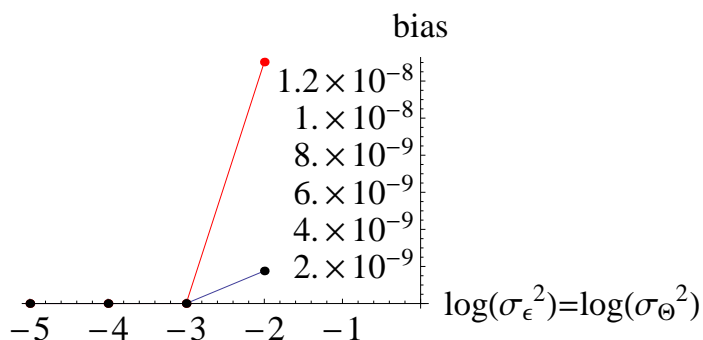
Doteraz sme sledovali MSE, vychýlenie aj rozptyl v závislosti na počte pozorovaní  $n$ , teraz budeme sledovať ich závislosť na veľkosti rozptylov chýb  $\sigma_\varepsilon^2$  a  $\sigma_\Theta^2$ , kde  $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\Theta^2$ . Za tieto rozptyly budeme dosádzať hodnoty 0.01, 0.001, 0.0001 a 0.00001.

Zoberieme si chyby s centrovaným gamma rozdelením a s hodnotou rozptylov chýb 0.01, s modelom  $Z_i = \sqrt{1/2 + (-1)^i/i}$ , s  $\beta =$ , pre  $n = 25$ . Závislosť bude vyzeráť nasledovne:

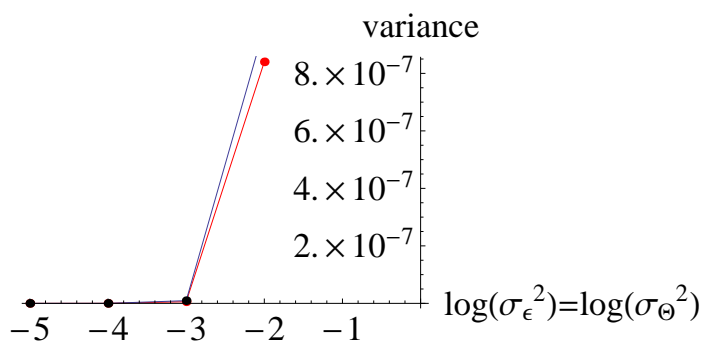


Obr. 4.35: MSE v závislosti na  $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\Theta^2$

Zo zvyšujúcou sa hodnotou rozptylu odhadov je rozdiel medzi hodnotami MSE väčší, nižší pre metódu TLS, pre malé rozptyly je rozdiel veľmi malý.



Obr. 4.36: vychýlenie v závislosti na  $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\Theta^2$



Obr. 4.37: rozptyl v závislosti na  $\sigma_\epsilon^2 = \sigma_\Theta^2$

Vychýlenie je pre TLS metódu nižšie, ale pri malých rozptyloch chýb je rozdiel malý, to isté platí aj pre rozptyly odhadov, len je rozdiel menej výrazný. Hodnoty vychýlení sú omnoho menšie ako rozptylu odhadov, rádovo o  $10^{-3}$ .

## 4.5 Zhrnutie

Pri porovnaní presnosti oboch metód vidíme, že metóda TLS je presnejšia, pretože hodnoty MSE boli prevažne nižšie ako u metódy LS. V ojedinelých prípadoch to



bolo opačne. S rastúcou hodnotou  $n$  sme si všimli, že rozdiely v hodnotách MSE medzi oboma metódami boli minimálne, výrazne rozdielne hodnoty sme mali len pri malých hodnotách  $n$ . Z Obrázku 4.36 je viditeľné, že pri vyššej hodnote rozptylu chýb je v tomto prípade hodnota MSE pre metódu TLS nižšia a pre malé hodnoty rozptylov chýb je rozdiel veľmi malý. Tak isto sme si všimli, že veľkosť  $\beta$  tiež ovplyvňuje hodnoty MSE, čím je  $\beta$  vyššie tým je vyššia aj hodnota MSE. Hodnoty vychýlenia sú výrazne nižšie ako hodnoty rozptylu odhadov a pri vychýlení je rozdiel medzi jednotlivými metódami výraznejší (nie väčší, výraznejší vzhľadom na nižšie hodnoty vychýlenia) ako u rozptylu odhadov najmä pre malé hodnoty  $n$ . V závislosti vychýlenia a rozptylu odhadov na rozptyloch chýb vidíme, že čím nižšia hodnota rozptylu chýb, tým je rozdiel v hodnotách pre metódy LS a TLS menší.

# Záver

Práca predstavila EIV model a spôsoby odhadovania parametrov LS a TLS. Podrobnejšie sme sa zaoberali metódou TLS, ktorá berie do úvahy aj chyby v regresoroch. Dôkladne boli rozobrané štatistické vlastnosti odhadov a štruktúra chyby. Pri sledovaní simulácií strednej kvadratickej odchýlky sme zhodnotili kvalitu odhadu. Na základe simulovaných dát sme porovnali metódy LS a TLS.

V praktickej časti je porovnaná presnosť metód LS a TLS. Pokúsili sme sa simulovať rôzne možné dáta. Z toho dôvodu sme volili viac typov rozdelenia chýb, rôzne hodnoty parametrov  $\beta$  a modelov  $Z_i$ . Ukázalo sa, že TLS prístup je ten presnejší. Usúdili sme tak na základe pozorovaní hodnôt strednej kvadratickej odchýlky, ktorá bola prevažne nižšia pre metódu TLS. Rozdiel v hodnotách MSE bol výrazný pri menších hodnotách  $n$ . Hodnoty strednej kvadratickej odchýlky pre obe metódy sme znázornili graficky v závislosti na počte pozorovaní a v závere aj v závislosti na rozptyle chýb. V ojedinelých prípadoch boli hodnoty MSE pre metódu LS nižšie. Zo závislosti MSE na rozptyle chýb bolo viditeľné, že s rastúcim rozptylom rastie aj MSE. Pozorovaním zvlášť rozptylu odhadov a vychýlenia sa ukázalo, že obe hodnoty v závislosti na  $n$  a tiež na rozptyle chýb sú prevažne nižšie pre metódu TLS.

# Zoznam použitej literatúry

- [1] HUFFEL, S. van, VANDEWALLE, J., *The Total Least Squares Problem: Computational Aspects and Analysis*. SIAM, 1991. ISBN 0-898-71275-0.
- [2] PESTA, M., *Modern asymptotic perspective on errors-in-variables modeling*, *Ph.D. thesis*. Charles University in Prague, 2010.
- [3] BJORCK, A., *Least squares methods*, in *Handbook of Numerical Analysis, Vol. I: Finite Difference Methods; Solution of Equations in  $R^n$* . Lions, eds., North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [4] GOLUB, G. H., LOAN, C. F. Van, *Matrix Computations*. 2. vyd., Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 1989. ISBN 0-8018-3739-1.
- [5] MIRSKY, L., *Symmetric gauge functions and unitarily invariant norms*. Quart. J. Math. Oxford, 11 (1960).
- [6] THOMPSON, R. C., *Principal submatrices IX: interlacing inequalities for singular values of submatrices*. Linear Algebra Appl., 5 (1972).
- [7] GLEESER, L. J., *Estimation in a multivariate errors in variables regression model: Large sample results*. Ann. Statist., 9 (1981).
- [8] GALLO, P. P., *Properties of estimators in errors-in-variables models*, *Ph.D. thesis*. Institute of Statistics Mimeoseries 1511, University of North Carolina, Chapel Hill, NC, 1982.
- [9] SCHMIDT, P., *Econometrics*. Marcel Dekker, New York, 1976.